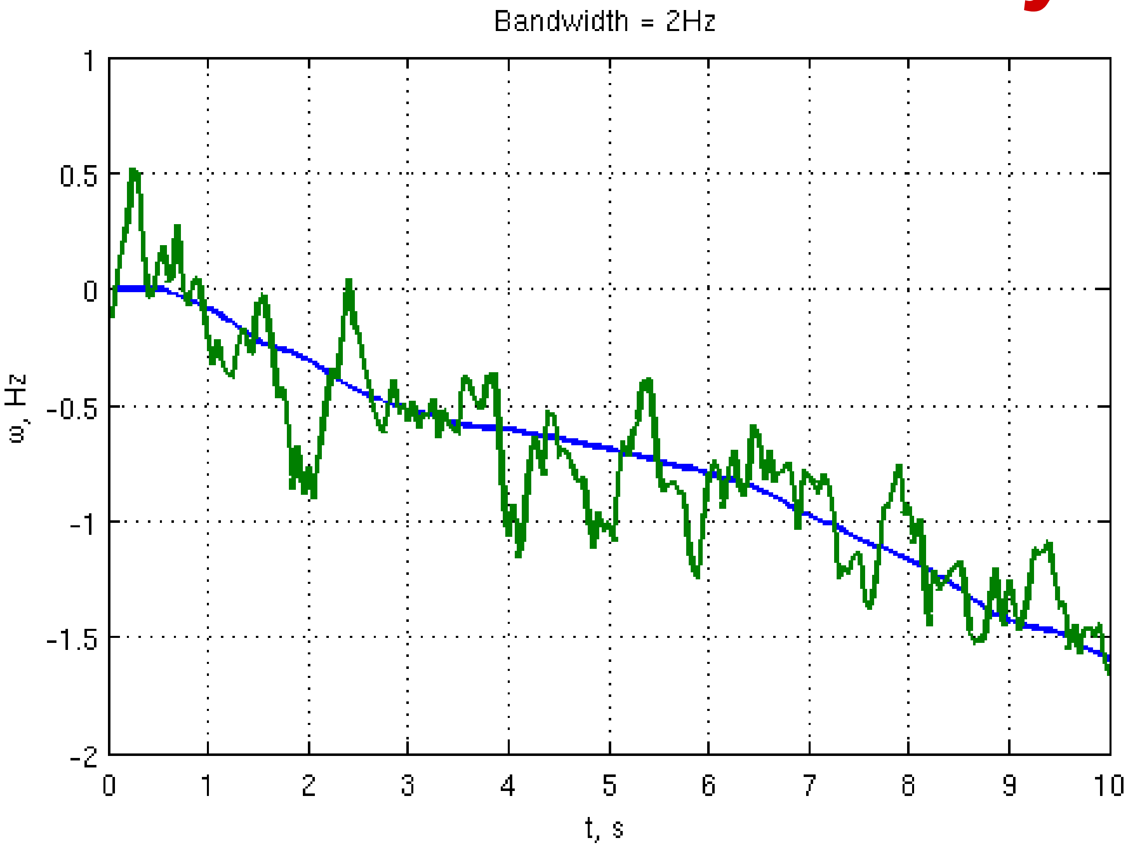
Математическое моделирование РТУ и С

Лекция 13. Формирование реализаций случайных процессов



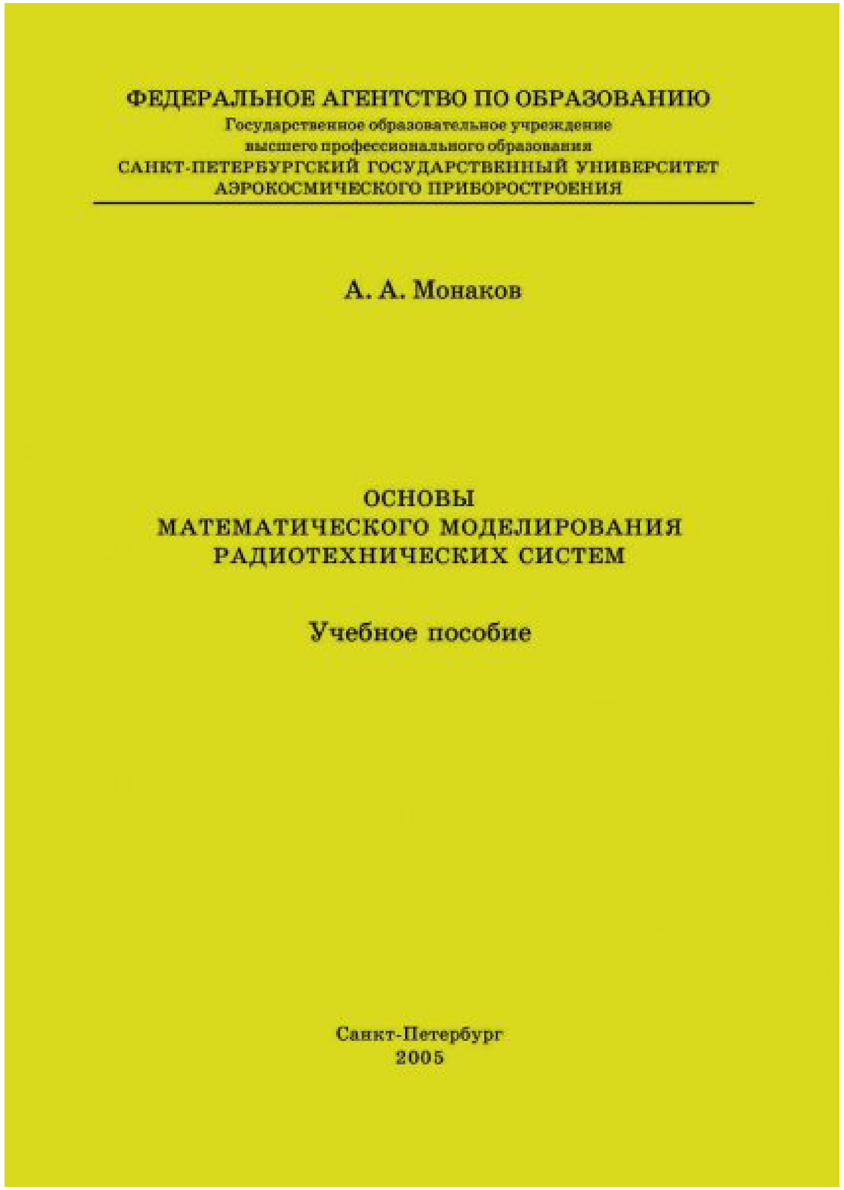
Преподаватель:
Корогодин Илья
korogodin@srns.ru

Литература

Монаков А.А. Основы математического моделирования радиотехнических систем. Учебное пособие. – СПб.: ГУАП, 2005. – 100с.

Раздел 1.2 Моделирование радиосигналов со случайными параметрами

Раздел 1.3 Моделирование случайных процессов


ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

А. А. Монаков

ОСНОВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2005

Векторные (многомерные) СВ

Совокупность СВ $\mathbf{x} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{vmatrix}^T$ **- вектор**

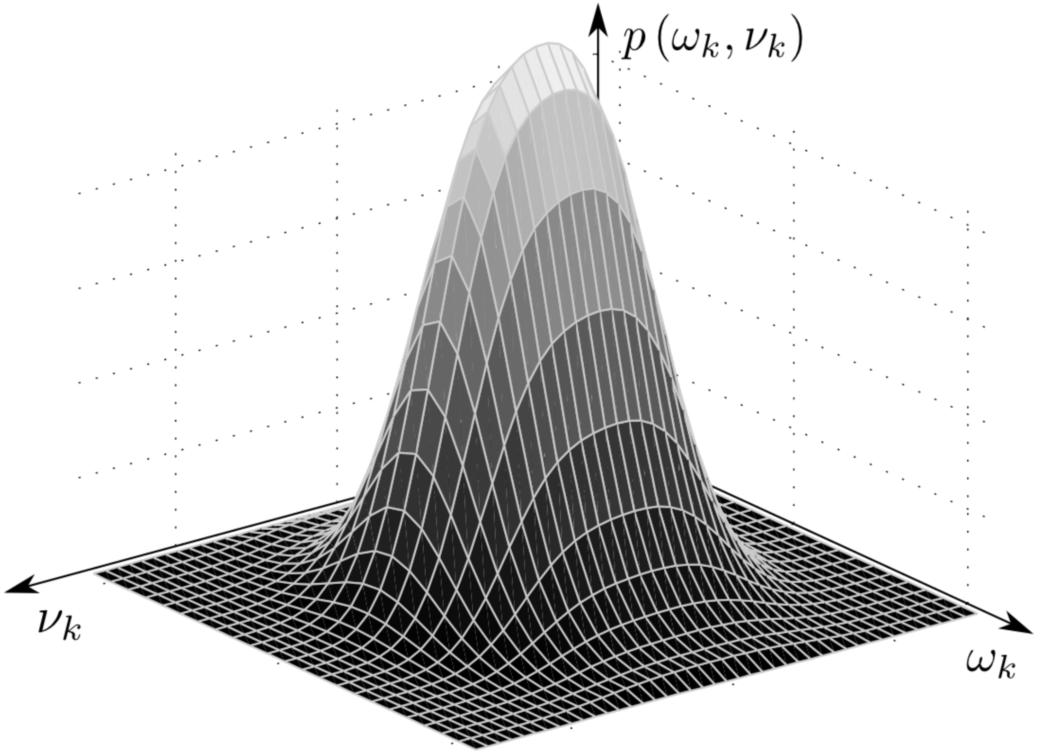
Плотность вероятности – скаляр:

$$p(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0}} \frac{P\left(X_1 < x_1,\ X_2 < x_2, \dots\right) - P\left(X_1 < x_1 + \Delta x_1,\ x_2 < X_2 + \Delta x_2, \dots\right)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_m}$$

Пример:

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} \omega_k & \nu_k \end{vmatrix}^T$$

$$\to p\left(\omega_k, \nu_k\right)$$



Многомерная нормальная СВ

Случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\top} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ имеет многомерное нормальное распределение, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- Произвольная линейная комбинация компонентов вектора $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ имеет нормальное распределение или является константой.

- Существует вектор независимых стандартных нормальных случайных величин $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_m)^{\top}$, вещественный вектор $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^{\top}$ и матрица $\mathbf{A}$ размерности $n \times m$, такие что:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}.$$

- Существует вектор $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ и неотрицательно определённая симметричная матрица $\boldsymbol{\Sigma}$ размерности $n \times n$, такие что характеристическая функция вектора $\mathbf{X}$ имеет вид:

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = e^{i\boldsymbol{\mu}^{\top}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

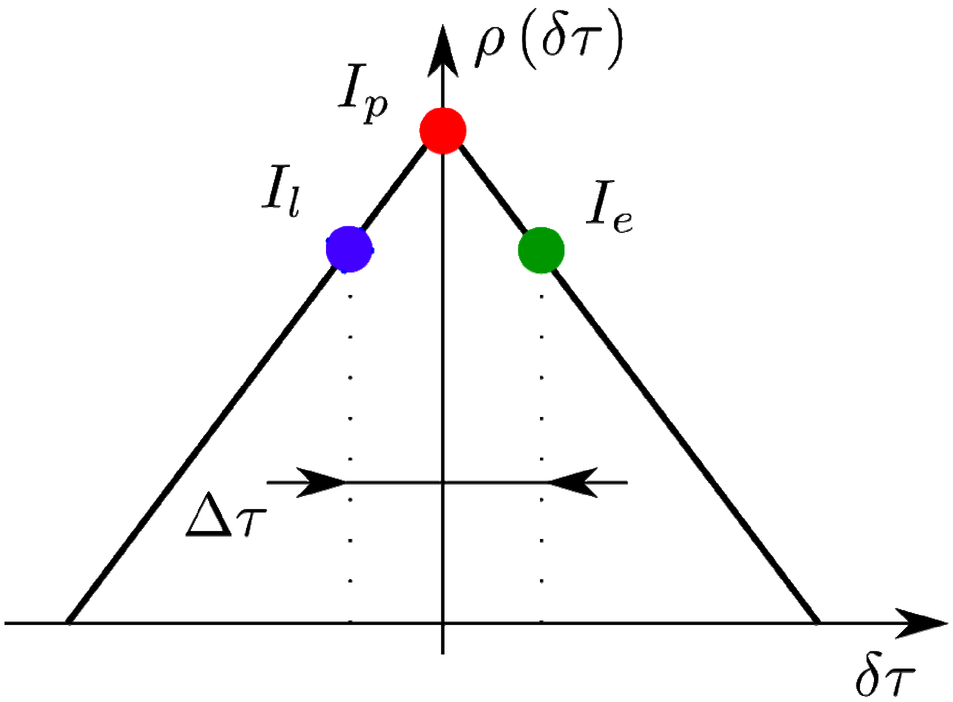
Многомерная нормальная СВ

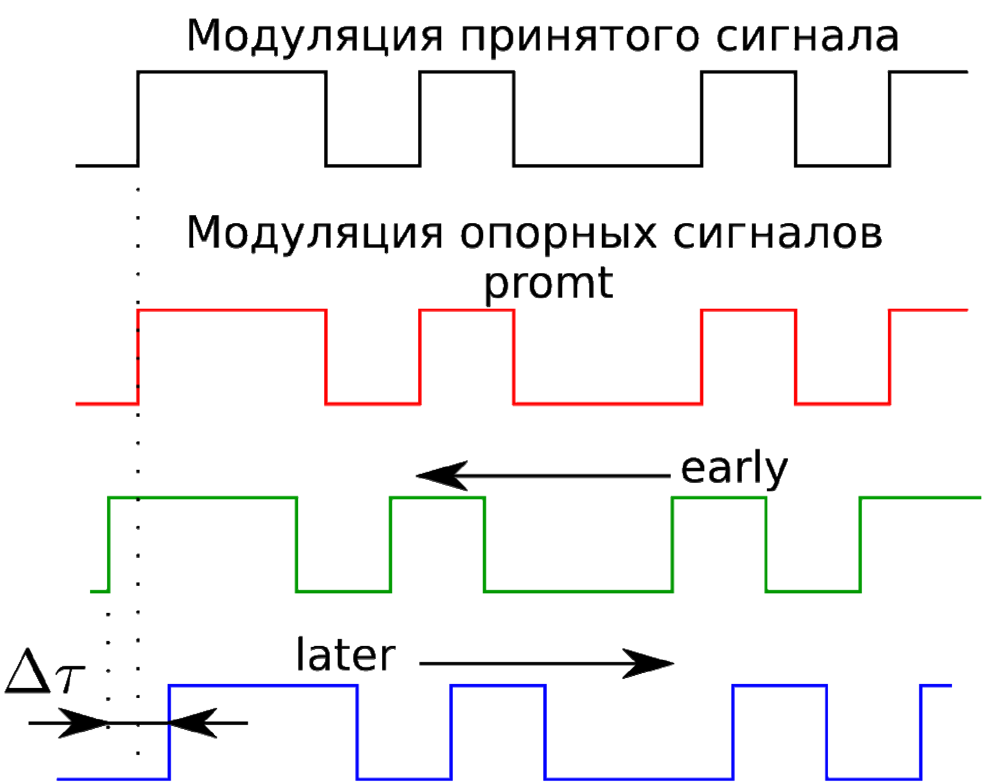
Её плотность вероятности:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \mathbf{D}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right\}$$

$$\mathbf{D} = M\left[(\mathbf{x}-\mathbf{m})(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\right],\ \mathbf{m} = M[\mathbf{x}]$$

Пример: шумы early/later/promt квадратур





Многомерная нормальная СВ

Статистический эквивалент:

$$I_p = A_{IQ}\rho(\delta\tau)\,sinc\left(\frac{\delta\omega T}{2}\right)cos\left(\frac{\delta\omega T}{2}+\delta\varphi\right)+n_{Ip}, \qquad n_{Ip} \sim N\left(0,\sigma_{IQ}^2\right)$$

$$I_e = A_{IQ}\rho\left(\delta\tau-\frac{\Delta\tau}{2}\right)sinc\left(\frac{\delta\omega T}{2}\right)cos\left(\frac{\delta\omega T}{2}+\delta\varphi\right)+n_{Ie}, \quad n_{Ie} \sim N\left(0,\sigma_{IQ}^2\right)$$

$$I_l = A_{IQ}\rho\left(\delta\tau+\frac{\Delta\tau}{2}\right)sinc\left(\frac{\delta\omega T}{2}\right)cos\left(\frac{\delta\omega T}{2}+\delta\varphi\right)+n_{Il}. \quad n_{Il} \sim N\left(0,\sigma_{IQ}^2\right)$$

Взаимная дисперсия:

$$M\left[n_{Ip}n_{Ie}\right]=M\left[n_{Ip}n_{Il}\right]=\rho\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)\sigma_{IQ}^2$$

$$M\left[n_{Il}n_{Ie}\right]=\rho(\Delta\tau)\sigma_{IQ}^2$$

Многомерная нормальная СВ

Шумы корреляционных сумм n_{Ip}, n_{Ie}, n_{Il} получены сворачиванием входного шума n с тремя опорными сигналами. Таким образом, выполняется второе необходимое и достаточное условие того, что тройка n_{Ip}, n_{Ie}, n_{Il} **имеет многомерное нормальное распределение** (если выборку n обозначить как $\mathbf{Z}$, опорные сигналы записать в виде трех строк матрицы $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\mu}$ - вектор-столбец из трех нулей)

Итого, компоненты $\mathbf{x} = \begin{vmatrix} n_{Ip} & n_{Ie} & n_{Il} \end{vmatrix}^T$ образуют многомерную нормальную СВ с нулевым мат. ожиданием и ковариационной матрицей:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \sigma_{IQ}^2 & \rho\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)\sigma_{IQ}^2 & \rho\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)\sigma_{IQ}^2 \\ \rho\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)\sigma_{IQ}^2 & \sigma_{IQ}^2 & \rho(\Delta\tau)\sigma_{IQ}^2 \\ \rho\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)\sigma_{IQ}^2 & \rho(\Delta\tau)\sigma_{IQ}^2 & \sigma_{IQ}^2 \end{vmatrix}.$$

Разложение Холецкого

Самый простой путь получить реализацию многомерной нормальной случайной величины – воспользоваться разложением Холецкого

$$\mathbf{L} = chol(\mathbf{D}) \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$\mathbf{L}$ - нижняя треугольная матрица со строго положительными элементами на диагонали

$$L_{ii} = \sqrt{D_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2} \qquad L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}}\left(D_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk}\right), \text{ если } j < i$$

Сформируем три независимых нормальных стандартных СВ, составим из них вектор-столбец

$$\mathbf{r} = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}^T \qquad r_i \sim N(0,1), \; M\left[r_i \, r_j\right] = 0$$

Умножим результат разложения Холецкого на сформированный вектор

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{r} + \mathbf{m} \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{x} \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{D})$$

$\mathbf{x}$ - требуемая реализация многомерной СВ с ковариационной матрицей $\mathbf{D}$ и вектором математических ожиданий $\mathbf{m}$

Разложение Холецкого

```
qcno_dB = 45;
N = 10000;
stdn = 8;

stdn_IQ = sqrt(stdn^2 * N /2);

ro1 = 0.75;
ro2 = 0.5;
Dp=stdn_IQ^2; Dpe=ro1*stdn_IQ^2; Del=ro2*stdn_IQ^2;

L=chol([Dp  Dpe Dpe;
        Dpe Dp  Del;
        Dpe Del Dp])';

Nj = 1000000;
nIp = nan(1,Nj);
nIe = nan(1,Nj);
nIl = nan(1,Nj);
for j = 1:Nj
    nI  = L*randn(3,1);

    nIp(j) = nI(1);
    nIe(j) = nI(2);
    nIl(j) = nI(3);
end

fprintf('Corrcoeff nIp nIe = %f\n', mean(nIp.*nIe / std(nIp) / std(nIe) ));
fprintf('Corrcoeff nIl nIe = %f\n', mean(nIl.*nIe / std(nIl) / std(nIe) ));
```

chol

Cholesky factorization

Syntax

```
R = chol(A)
L = chol(A,'lower')
[R,p] = chol(A)
[L,p] = chol(A,'lower')
[R,p,S] = chol(A)
[R,p,s] = chol(A,'vector')
[L,p,s] = chol(A,'lower','vector')
```

Description

`R = chol(A)` produces an upper triangular matrix R from the diagonal and upper triangle of matrix A, satisfying the equation R'*R=A. The lower triangle is assumed to be the (complex conjugate) transpose of the upper triangle. Matrix A must be positive definite; otherwise, MATLAB software displays an error message.

```
Corrcoeff nIp nIe = 0.750737
Corrcoeff nIl nIe = 0.500801
```

Реализации многомерной СВ

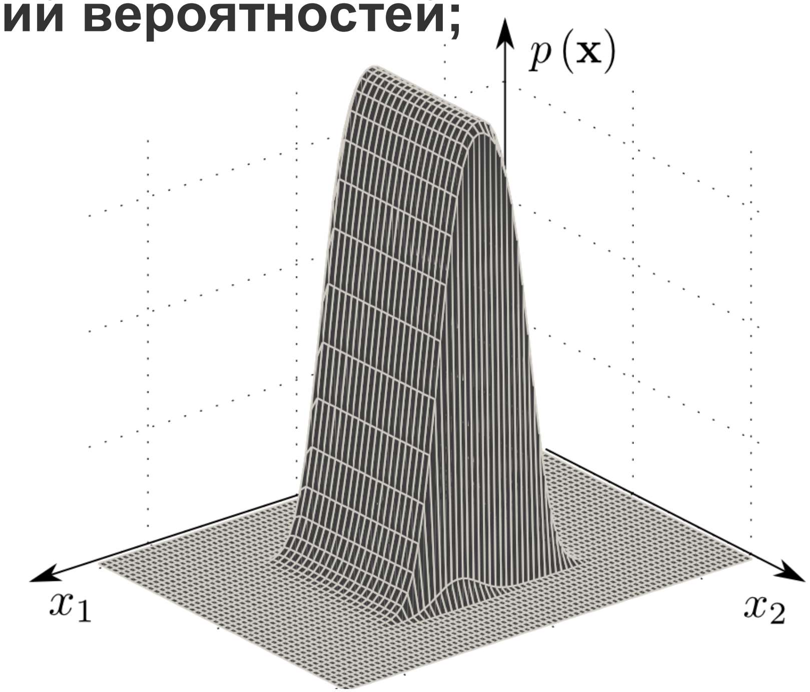
В общем случае многомерная СВ не нормальная.
Нужно по заданной многомерной плотности вероятности

$$p(\mathbf{x})$$

формировать реализации СВ.

Для этого можно воспользоваться обобщением методов, рассмотренных для одномерной СВ:

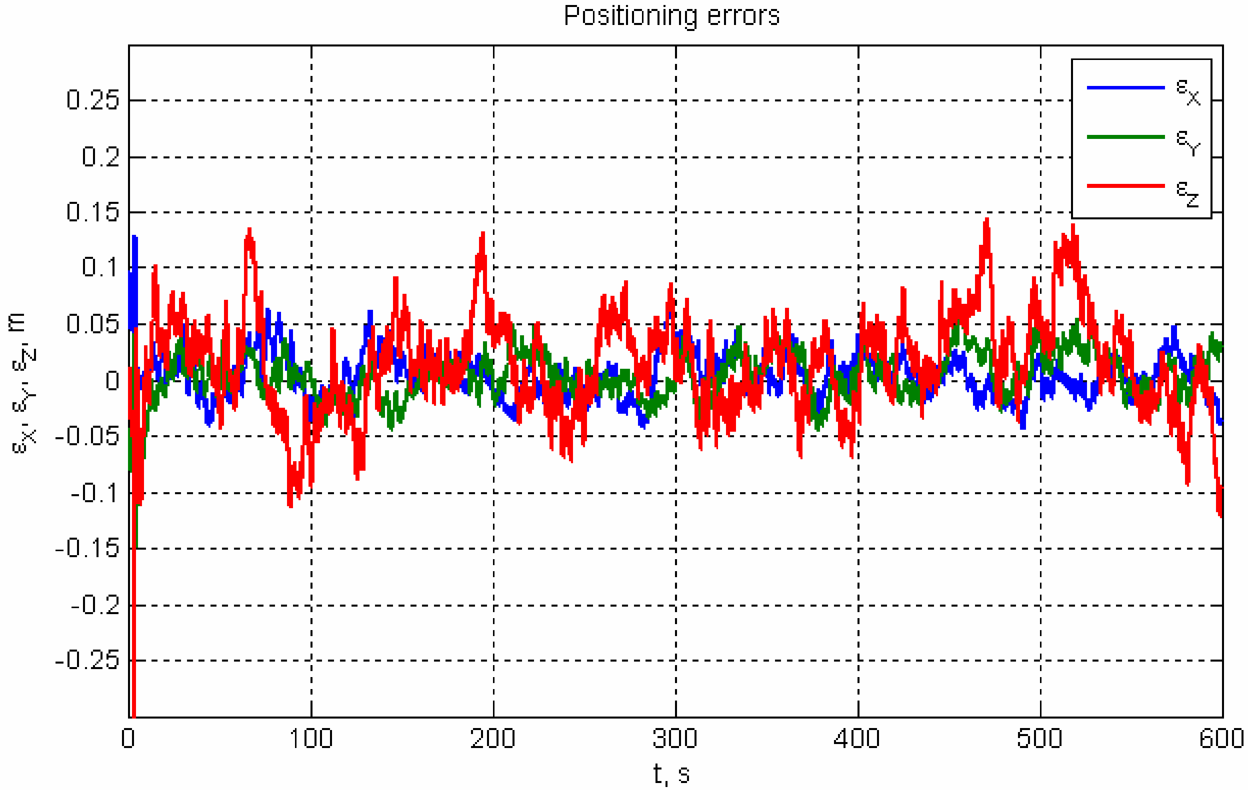
- **обобщенный метод Неймана;**
- **обобщенный метод интегральных функций вероятностей;**
- **метод условных вероятностей.**



Случайные процессы

-Случайный процесс

- Случайная последовательность



Описывается совокупностью ПВ:

$$p\left(x_1\left(t_1\right)\right), p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right)\right), \ldots, p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right) \ldots x_n\left(t_n\right)\right)$$

Случайные процессы

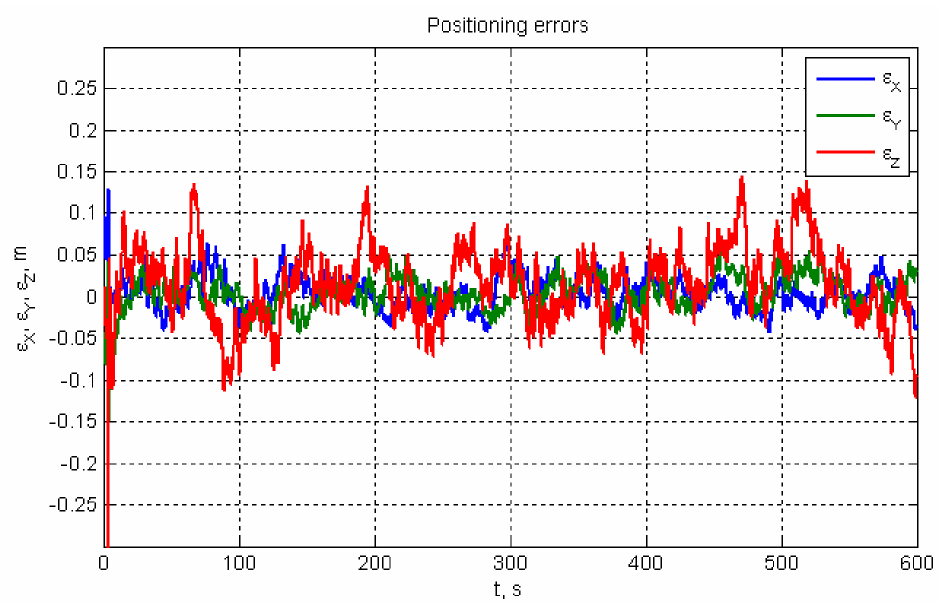
Стационарность в узком смысле

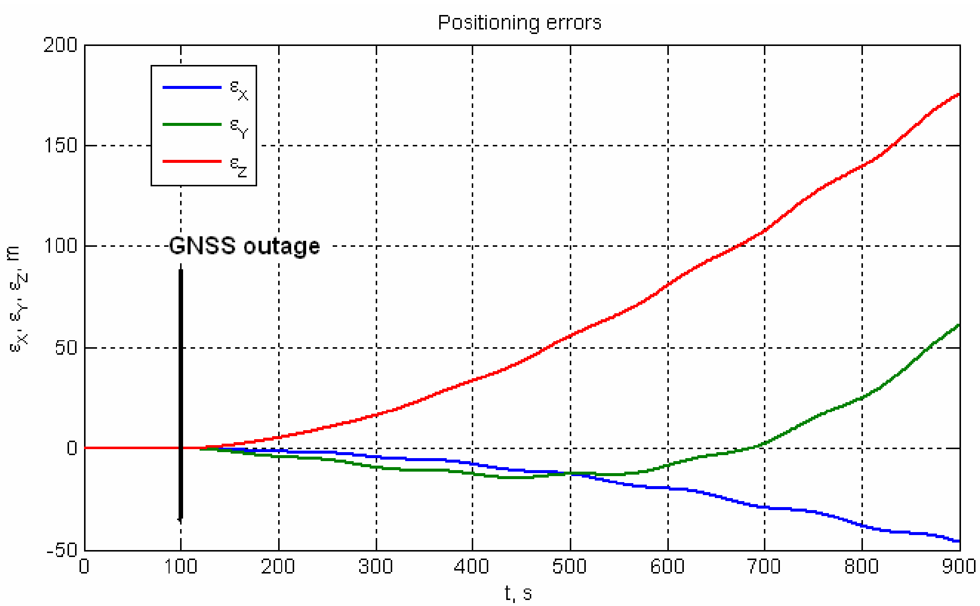
$$p\left(x\left(t_1-\tau\right),x\left(t_2-\tau\right)\ldots x\left(t_m-\tau\right)\right)=p\left(x\left(t_1\right),x\left(t_2\right)\ldots x\left(t_m\right)\right)$$

Стационарность в широком смысле

$$m_X = const, \quad D_X < \infty$$

$$R_X\left(t_1,t_2\right)=M\left[x\left(t_1\right)x\left(t_2\right)\right]=R_X\left(t_2-t_1\right)$$





Случайные процессы

$$АКФ: \quad R_X(\tau) = M\left[x(t)\,x(t-\tau)\right]$$

$$ВКФ: \quad R_{XY}(\tau) = M\left[x(t)\,y(t-\tau)\right]$$

$$СПМ: \quad S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\,\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

Гауссовский процесс

Гауссовская случайная последовательность

$$\mathbf{x} = \left| x_1(t_1), x_2(t_2) \ldots x_n(t_n) \right|$$

Описывается гауссовской совместной плотностью вероятности

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - M[\mathbf{X}]\right)^T \mathbf{R}_X^{-1}\left(\mathbf{x} - M[\mathbf{X}]\right)\right\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det\left(\mathbf{R}_X\right)}}$$

Корреляционные свойства могут быть самыми разнообразными.

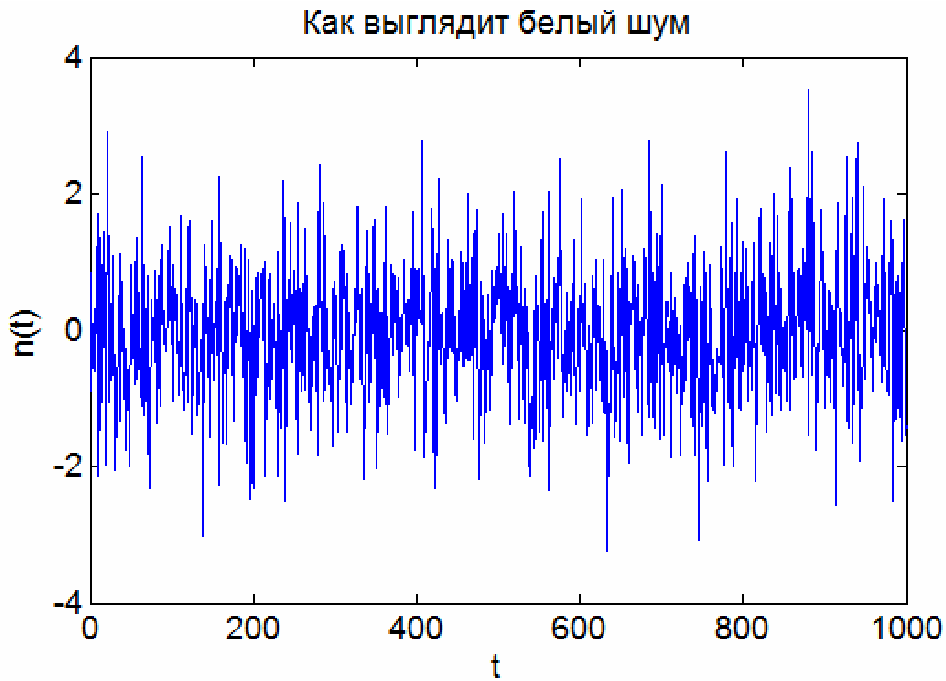
Белый гауссовский шум

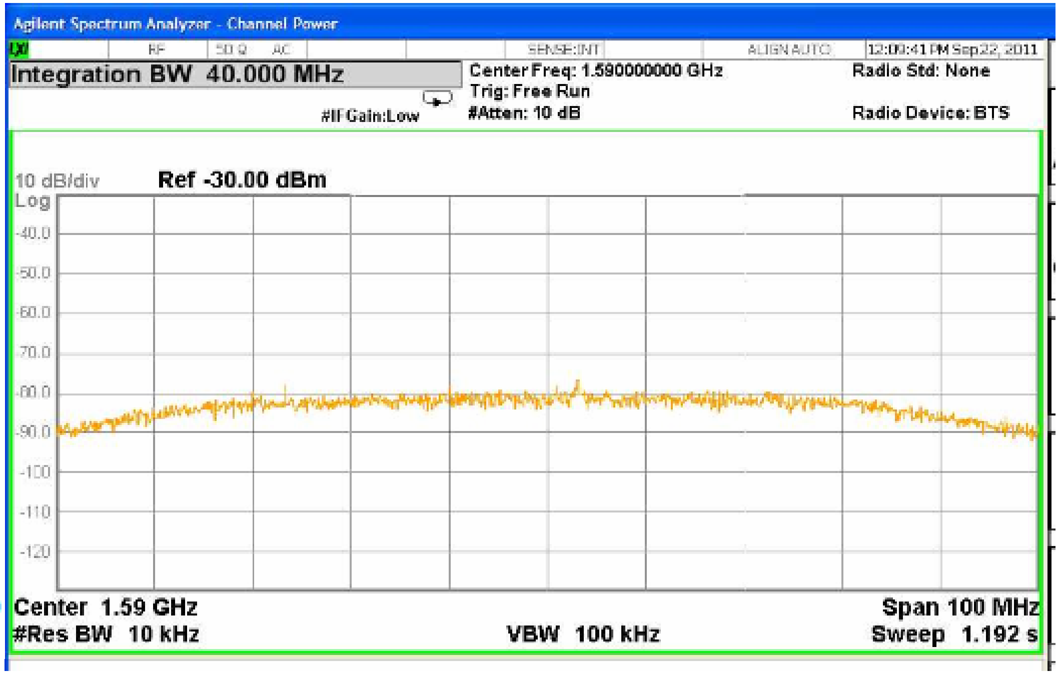
$$n(t) \to R(\tau) = M\left[n(t)n(t+\tau)\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Дискретный белый гауссовский шум (ДБГШ)

$$n_i \to \mathbb{N}(0,\sigma_n) \qquad R_{i,j} = M\left[n_i n_j\right] = \sigma_n^2\delta_{i,j} \quad \text{если} \quad n_i = \frac{1}{T}\int_{t_{i-1}}^{t_i} n(t)\,\mathrm{d}t, \text{ то } \quad \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2T}$$

Реализация в MATLAB: n = sigma * randn(1, N);





Марковские СП

Совместная ПВ для конечной точки процесса:

$$p\left(x_1(t_1), x_2(t_2)\ldots x_n(t_n)\right) = p\left(x_n(t_n) \mid x_1(t_1), x_2(t_2)\ldots x_{n-1}(t_{n-1})\right)\times$$

$$\times\, p\left(x_1(t_1), x_2(t_2)\ldots x_{n-1}(t_{n-1})\right)$$

Для марковского случайного процесса будущее не зависит от прошлого, а зависит только от настоящего, т.е.

$$p\left(x_n(t_n) \mid x_1(t_1), x_2(t_2)\ldots x_{n-1}(t_{n-1})\right) = p\left(x_n(t_n) \mid x_{n-1}(t_{n-1})\right)$$

Стохастическое уравнение диффузионного МП:

$\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\xi(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ - для непрерывного времени

$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, k-1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}, k-1)\xi_{k-1}$ - для дискретного времени

Гауссовские марковские СП

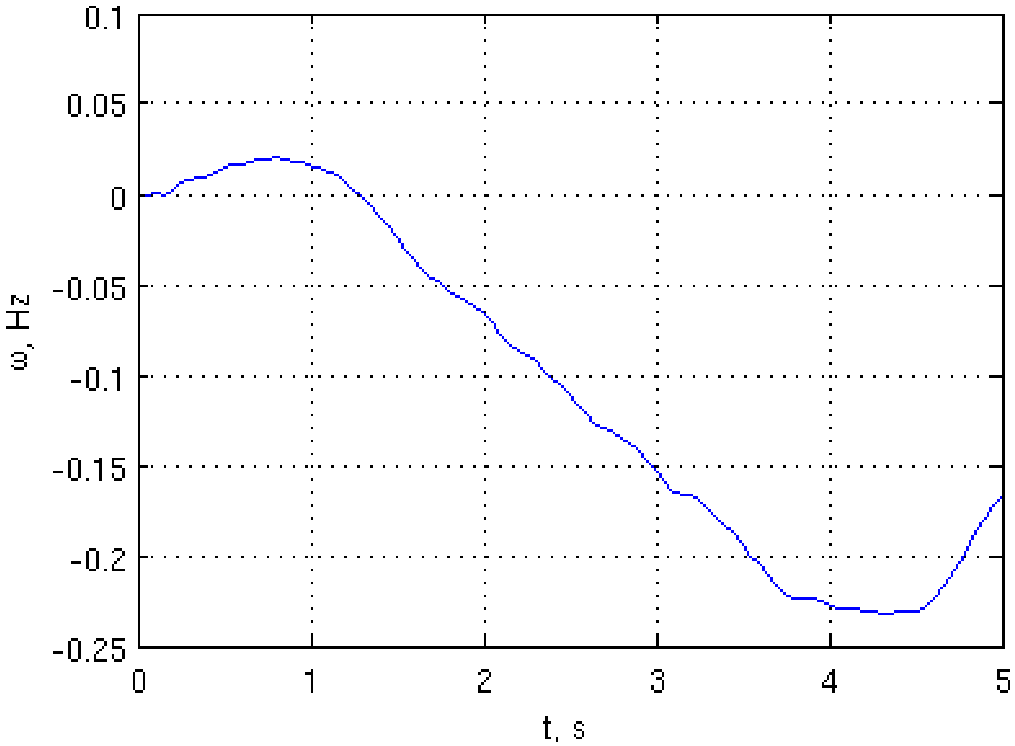
Описываются линейными стохастическими уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)\xi(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$ - для непрерывного времени

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\xi_{k-1}$$ - для дискретного времени

$$p\left(\mathbf{x}_k(t_k) \,|\, \mathbf{x}_{k-1}(t_{k-1})\right)$$ - гауссовская

```
G = [0 0;
     0  T];

F = [1 T;
     0 1];

Xist = [0; 0];
ksi = sqrt(Dksi) * randn(1, N);
Omega = nan(1, N);
for k = 1:N
    Xist = F*Xist + G*[0; ksi(k)];
    Omega(k) = Xist(1);
end
```



Винеровский процесс

$$w(t)=\int_0^t n(\tau)\,d\tau \qquad D_w(t)=M\left[w^2(t)\right]=\frac{N_0}{2}t$$

Винеровский процесс в дискретном времени

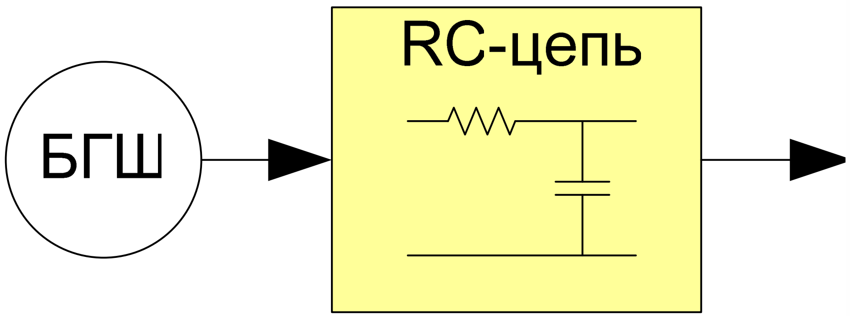
$$w_k=w_{k-1}+n_kT, \qquad n_k\rightarrow \mathbb{N}(0,\sigma_n),\ \sigma_n^2=\frac{N_0}{2T}$$

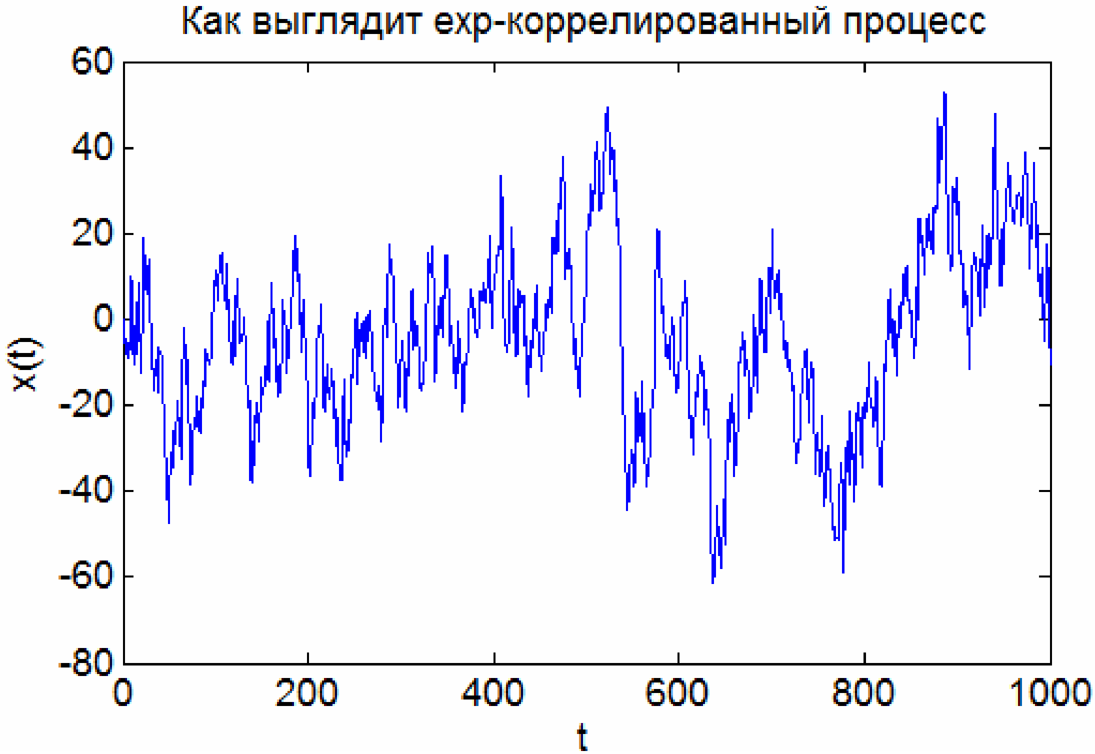
```
N = 100;
ksi = randn(1, N);

x = 0;

for i = 1:N
    x = x + ksi(i);
end
```

Экспоненциально коррелированный СП

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha x(t) + \sqrt{2\alpha\sigma^2}\,n(t); \qquad R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau)$$

$$x_k = \exp(-\alpha T)\,x_{k-1} + \sigma\sqrt{1-\exp(-2\alpha T)}\,n_{k-1}$$






```
N = 1e6; T = 0.001;
a = 0.01; sigma = 10;
ksi = randn(1, N);

x = 0;

for i = 1:N
   x = exp(-a*T)*x + sigma*sqrt(1-exp(-2*a*T))*ksi(i);
end
```

Метод формирующего фильтра

Нужную спектральную плотность мощности, а значит и корреляционную функцию, можно попробовать получить, пропустив белый шум через фильтр

$$S(\omega)=\frac{N_0}{2}\left|H(j\omega)\right|^2$$

Потребуется воспроизвести фильтр с АЧХ:

$$\left|H(j\omega)\right|=\sqrt{S(\omega)}$$

и импульсной характеристикой

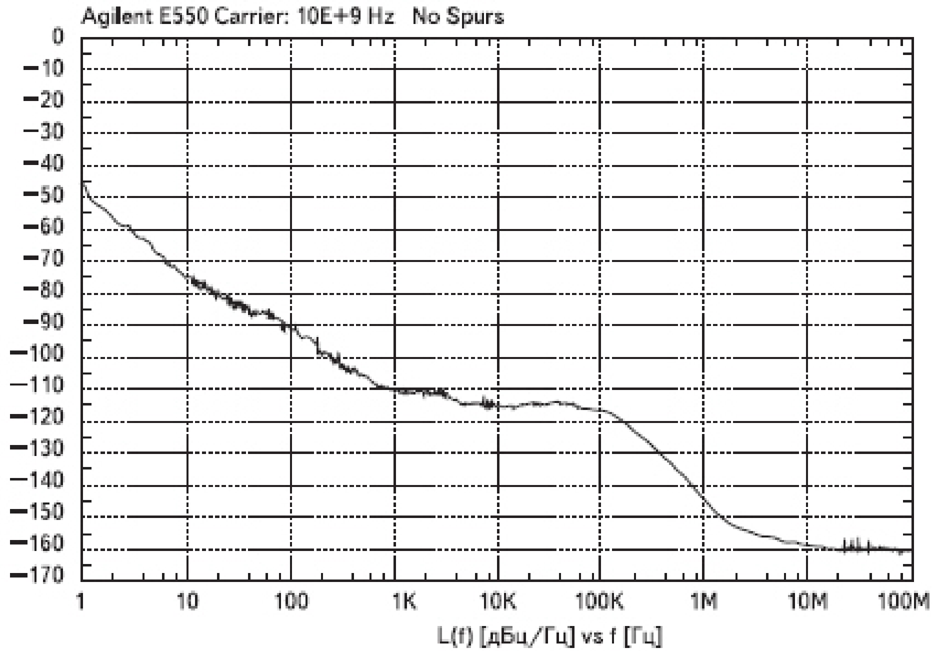
$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(j\omega)\right|e^{j\omega t}d\omega$$

Методы синтеза фильтров изложены в предыдущих лекциях.

Метод обратного БПФа

Порой требуется сформировать выборку со сложной спектральной плотностью мощности.

Например, СПМ шумов опорных генераторов имеют компоненты нечетной степени 1/f, что потребует для воспроизведения большой порядок фильтра.



Идея – набрать нужный нам спектр из отдельных гармоник:

$$x(t)=\sum_{n=1}^{N}U_n\exp\left(i\left(\omega_n t+\varphi_n\right)\right)$$

φ_n **- случайная на периоде**

U_n **- пропорциональна корню из СПМ**

После преобразований для конечной выборки получаем:

$$x=ifft(y),\ \ y_n\sim\sqrt{S(\omega_n)}\cdot z_n$$

z_n **- комплексная нормальная стандартная СВ**