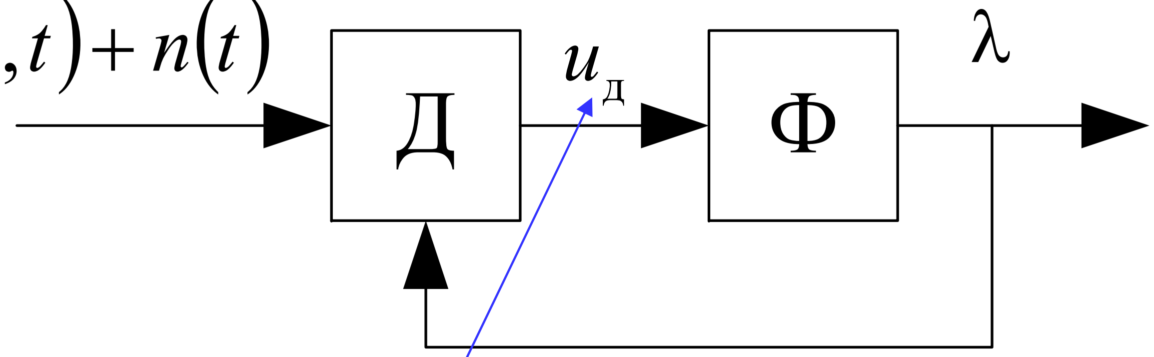
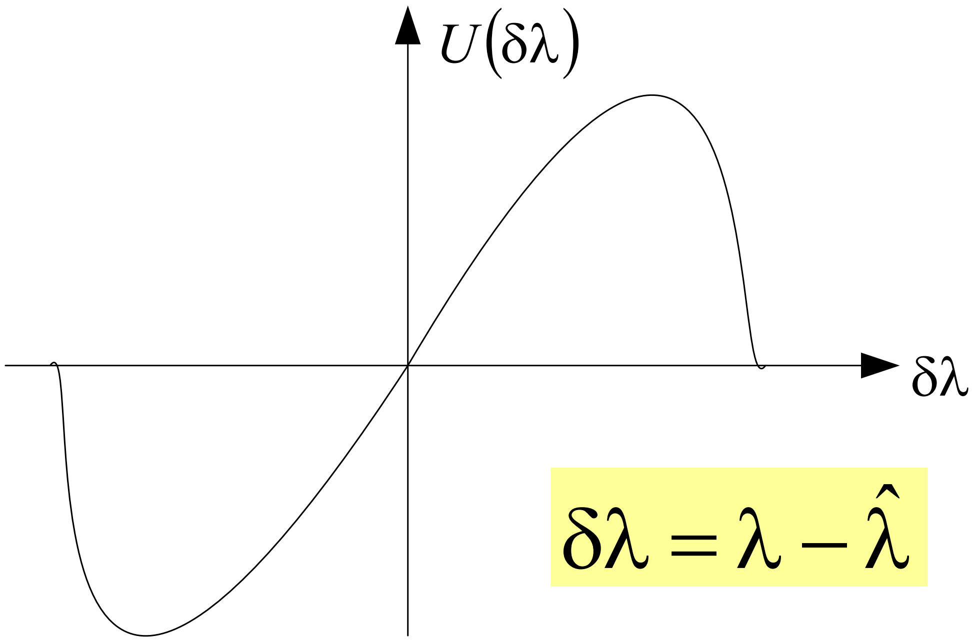
Лекция 9. Применение теории оптимальной линейной фильтрации

Синтез и анализ сглаживающих фильтров для следящих систем (см. п. 10.1.3).

$$y(t) = S(\lambda, t) + n(t)$$





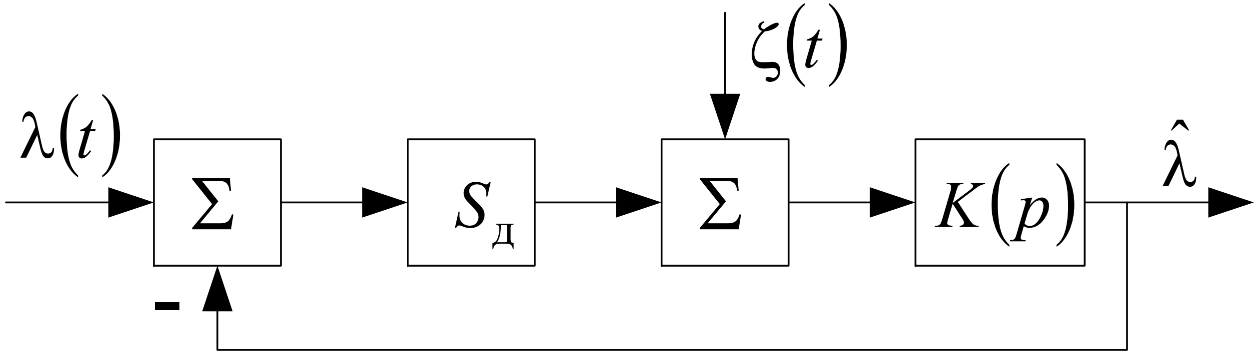
$$u_{д}(t) = U(\delta\lambda) + \zeta(t)$$

$$\delta\lambda = \lambda - \hat{\lambda}$$

Линеаризация следящей системы

$u_{д}(t)=U(\lambda-\hat{\lambda})+\zeta(t)\approx S_{д}\cdot(\lambda-\hat{\lambda})+\zeta(t)$ - при малых ошибках слеж-я

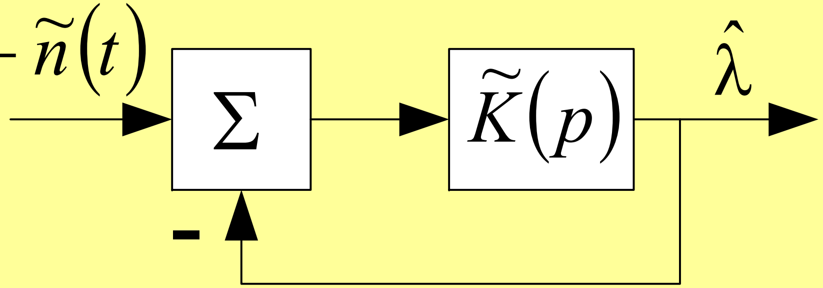
$S_{д}=\left.\dfrac{\partial U(\delta\lambda)}{\partial\delta\lambda}\right|_{\delta\lambda=0}$ - крутизна дискриминационной характеристики



$\tilde{K}(p)=S_{д}K(p)$

$\tilde{y}(t)$ – эквивалентные наблюдения

$\tilde{y}(t)=\lambda(t)+\tilde{n}(t)$



$\tilde{n}(t)=\zeta(t)/S_{д}$ – шум эквивалентных наблюдений

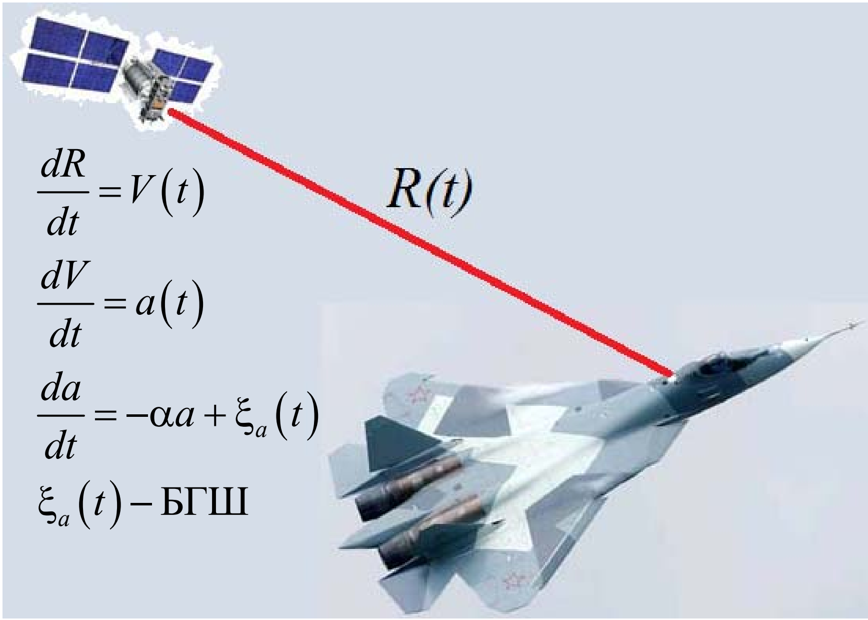
Пример синтеза фильтра для системы ЧАП

Задача: следить за доплеровской частотой сигнала, которая пропорциональна радиальной скорости.

Модель изменения доплеровской частоты:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \nu(t)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = -\alpha\nu + \alpha\xi(t)$$



$\Omega(t) = \left(\frac{\omega_0}{c}\right) V(t) -$ доплеровская частота, ($V(t) -$ радиальная скорость, ω_0 - несущая)

$\nu(t) = \left(\frac{\omega_0}{c}\right) a(t)$, $a(t) -$ радиальное ускорение, $\xi(t)$- формирующий БГШ

Пример синтеза фильтра для системы ЧАП

Заданы:

α – ширина спектра флуктуаций радиального ускорения,

σ_a – среднеквадратическое ускорение, из которого находим S_ξ:

$$S_\xi = S_{\xi a}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 = 2\sigma_a^2\alpha\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2$$ (СПМ формирующего шума)

Эквивалентные наблюдения доплеровской частоты:

$$\tilde{y}(t) = \Omega(t) + \tilde{n}(t)$$

$\tilde{n}(t)$ - БГШ с нулевым м.о. и спектральной плотностью $\tilde{N}_0/2$

$\tilde{N}_0$ - определяется флуктуационной характеристикой частотного дискриминатора

Введём вектор состояния: $\mathbf{x}(t) = \left|\Omega \quad \nu\right|^{\mathrm{T}}$

Приведение постановки задачи к общему виду

$$\tilde{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \tilde{n}(t), \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\xi(t),$$

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ то есть:}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \Omega \\ \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Omega \\ \nu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \end{vmatrix} \cdot \xi(t)$$

Уравнения фильтрации в общем виде:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_{\text{x}}(t)\mathbf{H}^{\text{T}}(t)2\tilde{N}_0^{-1}\left(y(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}\right), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{D}_{\text{x}}(0) = \mathbf{D}_{\mathbf{x0}}$$

$$\frac{d\mathbf{D}_{\text{x}}}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{D}_{\text{x}} + \mathbf{D}_{\text{x}}\mathbf{F}^{\text{T}}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{G}(t)S_{\xi}\mathbf{G}^{\text{T}}(t) - \mathbf{D}_{\text{x}}\mathbf{H}^{\text{T}}(t)2\tilde{N}_0^{-1}\mathbf{H}(t)\mathbf{D}_{\text{x}}^{\text{T}}$$

После подстановки всех матриц в общие формулы

Результирующие уравнения фильтра системы ЧАП:

Сам фильтр:

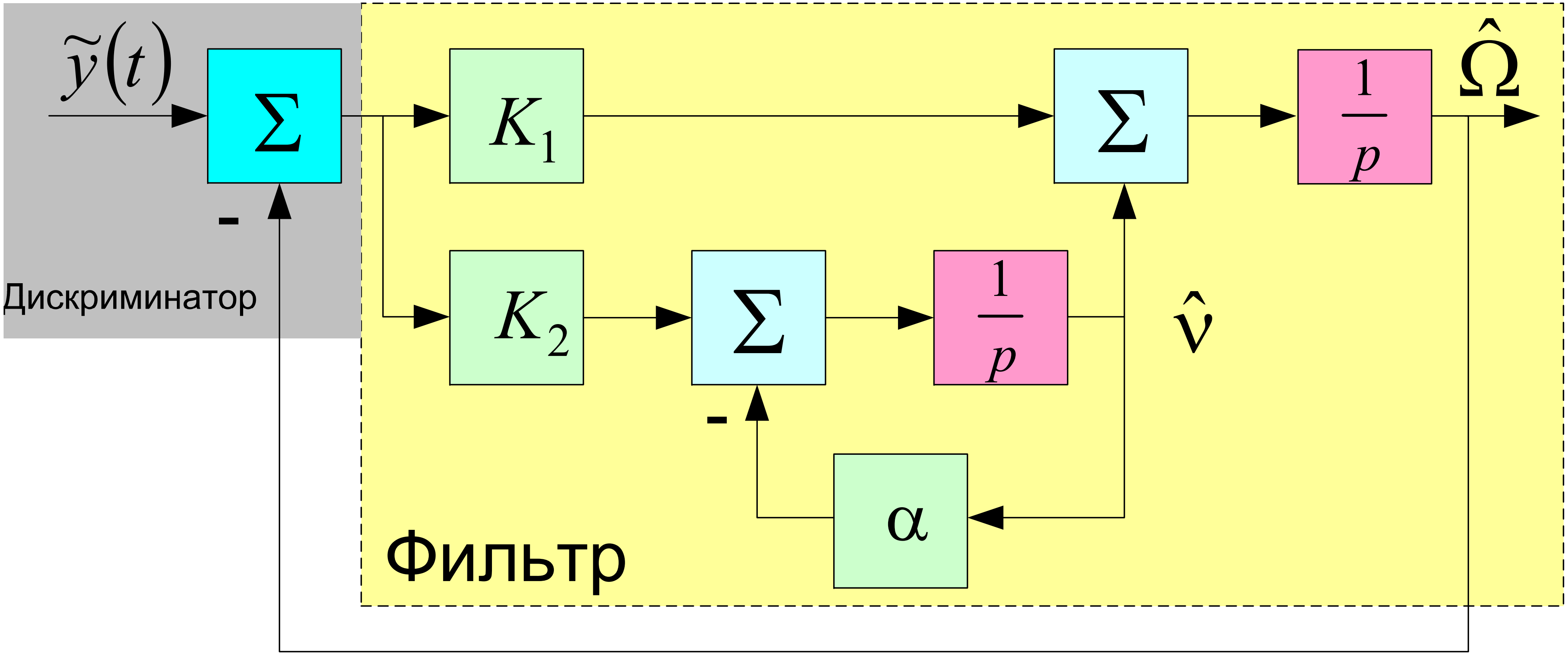
$$\frac{d\hat{\Omega}}{dt} = \hat{\nu} + \frac{2D_{11}}{\tilde{N}_0}\left(y(t) - \hat{\Omega}\right), \qquad \frac{d\hat{\nu}}{dt} = -\alpha\hat{\nu} + \frac{2D_{12}}{\tilde{N}_0}\left(y(t) - \hat{\Omega}\right)$$

Уравнения для дисперсий:

$$\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{vmatrix}; \qquad \frac{dD_{11}}{dt} = 2D_{12} - \frac{2D_{11}^2}{\tilde{N}_0}, \qquad (10.25)$$

$$\frac{dD_{12}}{dt} = D_{22} - \alpha D_{12} - \frac{2D_{11}D_{12}}{\tilde{N}_0}, \qquad \frac{dD_{22}}{dt} = -2\alpha D_{22} + \frac{\alpha^2 S_\xi}{2} - \frac{2D_{12}^2}{\tilde{N}_0}$$

Схема оптимальной ЧАП



$K_1 = 2D_{11}/\tilde{N}_0$

$K_2 = 2D_{12}/\tilde{N}_0$

- коэффициенты фильтра, определяющие полосу

Установившийся режим

В установившимся режиме, т.е. при $t \to \infty$

$$\boxed{\mathbf{D}_{\mathbf{x}} = \mathbf{const} \Rightarrow \frac{dD_{ij}}{dt} = 0}$$

Следовательно, приравниваем правые части (10.25) к нулю и получаем:

$$D_{11} = \frac{\alpha \tilde{N}_0}{2}\left(\sqrt{1 + 2\sqrt{S_\xi / \left(\alpha^2 \tilde{N}_0\right)}} - 1\right), \quad D_{12} = D_{11}^2 / \tilde{N}_0,$$

$$D_{22} = \frac{1}{2\alpha}\left(\alpha^2 S_\xi / 2 - 2D_{12}^2 / \tilde{N}_0\right) \Rightarrow$$

$$K_1 = \alpha\left(\sqrt{1 + 2\sqrt{S_\xi / \left(\alpha^2 \tilde{N}_0\right)}} - 1\right), \quad K_2 = K_1^2 / 2,$$

$K_\text{ф}(p) = \dfrac{1}{p}\left(K_1 + \dfrac{K_2}{p + \alpha}\right)$ - коэффициент передачи фильтра

Зачем это всё было нужно?

1. Чтобы найти дисперсию ошибки фильтрации частоты в установившимся режиме – D_{11}

2. Чтобы найти полосу ЧАП:

$$\Delta F_{ЧАП} = \frac{1}{2\pi \left| K_{y\Omega}(0) \right|^2} \int_0^\infty \left| K_{y\Omega}(j\omega) \right|^2 \mathrm{d}\omega$$

$$K_{y\Omega}(p) = \frac{K_{\text{ф}}(p)}{1 + K_{\text{ф}}(p)}$$

(С.В. Первачёв «Радиоавтоматика». Стр. 111, 107)

Домашнее задание

Анализ и моделирование рассмотренной системы ЧАП.

Ширина спектра флуктуаций ускорения α=1 c^{-1}

Флуктуационная характеристика частотного дискриминатора определяется выражением

$$\tilde{N}_0\left(q_{c/n_0}\right) = \frac{2}{q_{c/n_0}T^2}\left(1 + \frac{1}{2q_{c/n_0}T}\right), \quad T = 10 \text{ мс},$$

$q_{c/n_0} = 10^{0,1\cdot(14\ldots50 \text{ дБГц})}$ [Гц] - отношение мощности сигнала к спектральной плотности шума на входе приёмника;

$\omega_0 = 2\pi\cdot(1602 \text{ МГц}) -$ несущая частота

Домашнее задание

1. Найти аналитически и построить на графиках зависимости среднеквадратической ошибки фильтрации частоты и оптимальной полосы ЧАП от отношения с/ш:

$$\sigma_\Omega\left(q_{c/n_0}\right)=\sqrt{D_{11}}\ \left(q_{c/n_0}\right);\ \Delta F_{ЧАП}\left(q_{c/n_0}\right)\ \text{при}\ \sigma_a=10\ \text{м/с}^2\ \ \text{-- ???}$$

2. Найти аналитически и построить на графиках зависимости среднеквадратической ошибки фильтрации частоты и оптимальной полосы ЧАП от среднеквадратического ускорения:

$$\sigma_\Omega\left(\sigma_a\right)=\sqrt{D_{11}}\ \left(\sigma_a\right);\ \Delta F_{ЧАП}\left(\sigma_a\right)\ \text{при}\ q_{c/n_0}=10^{0{,}1\cdot(30\ \text{дБГц})}\ \ \text{-- ???}$$

* $\sigma_a=1...30$ м/с^2

** при построении графиков от q_{c/n_0} по оси X откладывать значения q_{c/n_0} в дБГц: $q_{c/n_0}[\text{дБГц}]=10\lg\left(q_{c/n_0}[\text{Гц}]\right)$

Домашнее задание

Решить аналогичную задачу в дискретном времени:

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + \nu_{k-1} T, \qquad T = 10 \text{ мс},$$

$$\nu_k = \nu_{k-1} \cdot \left(1 - \alpha T\right) + \alpha T \cdot \xi_{k-1}, \quad \sigma_\xi^2 = \frac{S_\xi}{2T},$$

$$\tilde{y}_k = \Omega_k + \tilde{n}_k, \quad \tilde{n}_k - \text{ ДБГШ с дисперсией } \sigma_n^2 = \frac{\tilde{N}_0\left(q_{c/n_0}\right)}{2T}$$

3. Записать уравнения оптимальной фильтрации для дискретного времени: $\hat{\Omega}_k = \ldots, \quad \hat{\nu}_k = \ldots$

4. Смоделировать входное воздействие и оптимальную систему ЧАП в дискретном времени при следующих параметрах:

$$q_{c/n_0} = 10^{0,1 \cdot (30 \text{ дБГц})}, \qquad \mathbf{D}_0 = \begin{vmatrix} (34 \text{ рад/с})^2 & 0 \\ 0 & (340 \text{ рад/с}^2)^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Omega_0 \\ \nu_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 100 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \hat{\Omega}_0 \\ \hat{\nu}_0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\sigma_a = 10 \text{ м/с}^2,$$

Домашнее задание

5. Построить график зависимости истинной доплеровской частоты от времени: $\Omega_k(t_k), \quad t = 0...1000$ с

6. Построить график зависимости среднеквадратической ошибки фильтрации частоты от времени:

$$\sqrt{D_{11}}(t_k), \quad t = 0...1 \text{ с}$$

(До установившегося режима, когда $D_{11} \approx const$)

7. Построить мгновенную ошибку фильтрации частоты в зависимости от времени:

$$\varepsilon_\Omega(t_k) = \hat{\Omega}_k - \Omega_k, \quad t = 0...10 \text{ с}$$

8. Для установившегося режима сравнить D_{11} и дисперсию ошибки, рассчитанную по графику $\varepsilon_\Omega(t_k)$, сделать вывод.