Лекция 6. Представление сообщений в виде случайных процессов.

Если оцениваемая величина меняется со временем, то решение задачи оценки параметров сигнала не подходит.

1. Информативные параметры меняются со временем

$$\boxed{\lambda(t) \neq const}$$

2. Требуется дать оценку процесса не для какого-то одного, а для каждого интересующего момента времени.

$y(t_k) = S(t_k, \lambda_k(t_k)) + n(t_k)$: наблюдения на интервале $[0, t_k]$

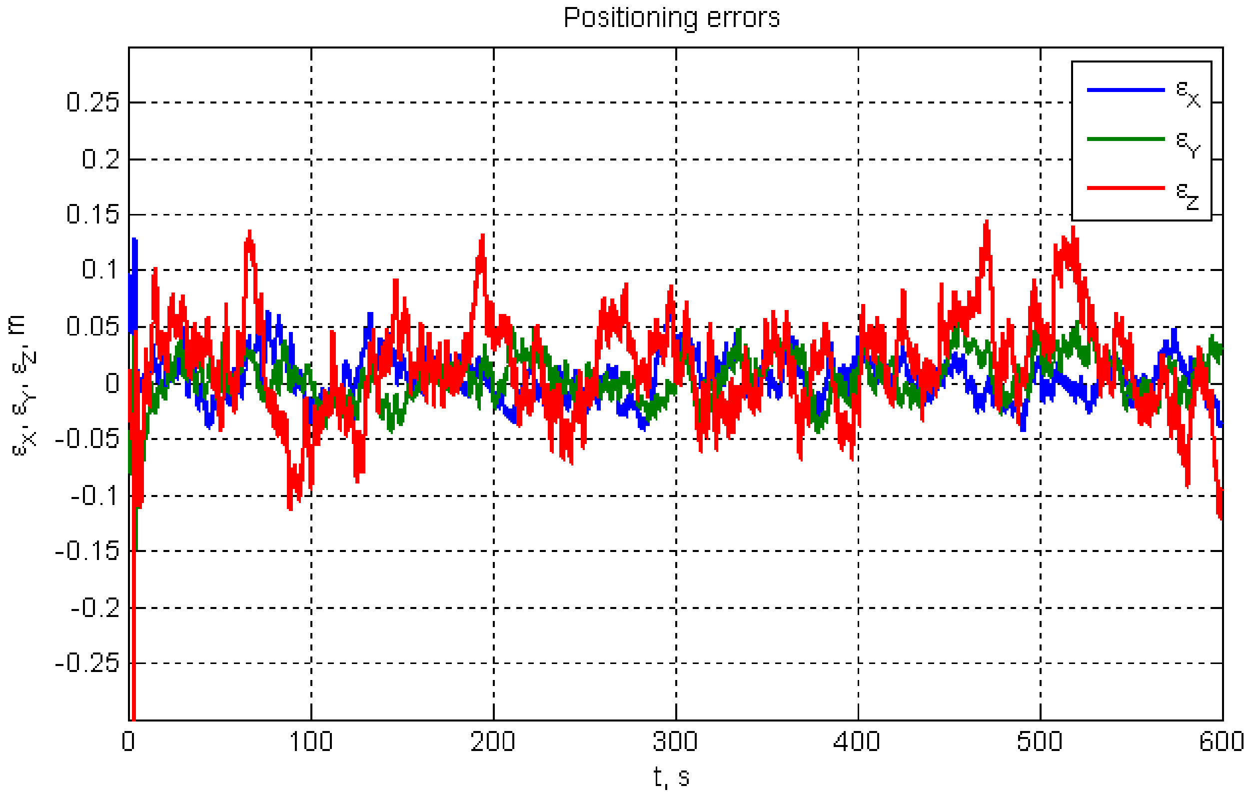
$S(t_k, \lambda(t_k))$ – сигнал, несущий информационный процесс $\lambda(t_k)$

$n(t_k)$ - БГШ с односторонней СПМ $N_0 = 2\sigma_n^2 T$

+ известна априорная информация о $\lambda(t_k)$

Случайные процессы

Пример случайного процесса (ошибка оценивания координат в зависимости от времени):



Сл. процесс описывается совокупностью ПВ:

$$p\left(x_1\left(t_1\right)\right), p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right)\right), \ldots, p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right) \ldots x_n\left(t_n\right)\right)$$

Стационарность СП

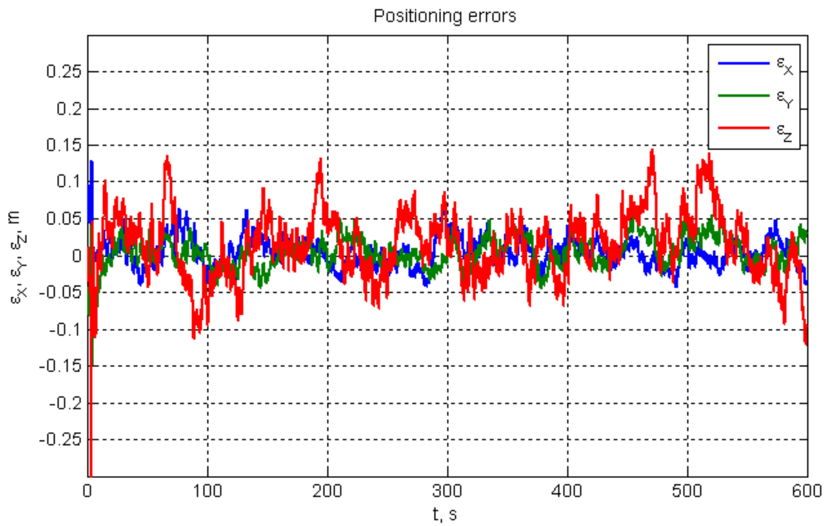
Стационарность в узком смысле

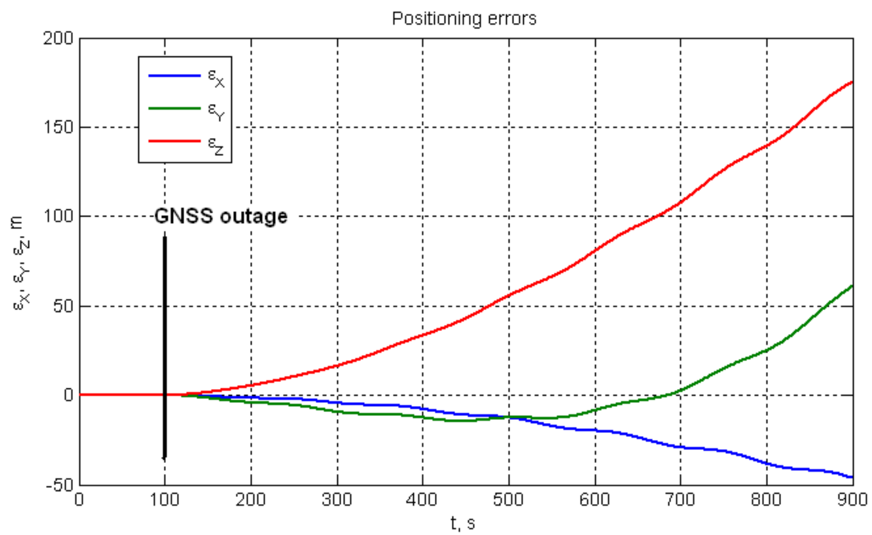
$$p\left(x(t_1-\tau),x(t_2-\tau)\ldots x(t_m-\tau)\right)=p\left(x(t_1),x(t_2)\ldots x(t_m)\right)$$

Стационарность в широком смысле

$$m_X = const, \quad D_X < \infty$$

$$R_X(t_1,t_2)=M\left[x(t_1)x(t_2)\right]=R_X(t_2-t_1)$$





Корреляционная функция и спектральная плотность СП

$$AK\Phi: \quad R_X(\tau) = M\left[x(t)x(t-\tau)\right]$$

$$BK\Phi: \quad R_{XY}(\tau) = M\left[x(t)y(t-\tau)\right]$$

$$C\Pi M: \quad S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

Гауссовские случайные процессы

Гауссовская случайная последовательность

$$\mathbf{x} = \left| x_1(t_1), x_2(t_2) \ldots x_n(t_n) \right|^{\mathrm{T}}$$

Описывается гауссовской совместной плотностью вероятности

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - M[\mathbf{x}]\right)^{T} \mathbf{R}_X^{-1}\left(\mathbf{x} - M[\mathbf{x}]\right)\right\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\mathbf{R}_X)}}$$

Марковские случайные процессы

Совместная ПВ для конечной точки процесса:

$$p\left(x_1(t_1),x_2(t_2)\dots x_n(t_n)\right)=p\left(x_n(t_n)\,|\,x_1(t_1),x_2(t_2)\dots x_{n-1}(t_{n-1})\right)p\left(x_1(t_1),x_2(t_2)\dots x_{n-1}(t_{n-1})\right)$$

Для марковского случайного процесса будущее не зависит от прошлого, а зависит только от настоящего, т.е.

$$p\left(x_n(t_n)\,|\,x_1(t_1),x_2(t_2)\dots x_{n-1}(t_{n-1})\right)=p\left(x_n(t_n)\,|\,x_{n-1}(t_{n-1})\right)$$

$p\left(x_n(t_n)\,|\,x_{n-1}(t_{n-1})\right)$ **- это плотность вероятности перехода**

Стохастическое уравнение диффузионного МП:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)+\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\xi(t),\quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$ - для непрерывного времени

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1},k-1)+\mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1},k-1)\xi_{k-1}$$ - для дискретного времени

Гауссовские марковские процессы

Описываются линейными стохастическими уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)\xi(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$ - для непрерывного времени

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\xi_{k-1}$$ - для дискретного времени

$p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1})$ - гауссовская, то есть:

$$p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}\right)^T \mathbf{R}_X^{-1}\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}\right)\right\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\mathbf{R}_X)}}$$

$$\mathbf{R}_X = M\left[\left(\mathbf{G}_{k-1}\xi_{k-1}\right)\left(\mathbf{G}_{k-1}\xi_{k-1}\right)^T\right] = \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{D}_\xi\mathbf{G}_{k-1}^T$$

Винеровский процесс

$$w(t)=\int_0^t \xi(\tau)\,d\tau \qquad D_w(t)=M\left[w^2(t)\right]=\frac{N_0}{2}t$$

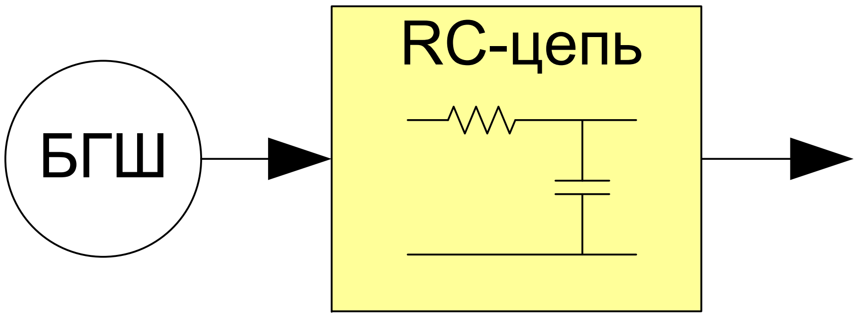
Винеровский процесс в дискретном времени

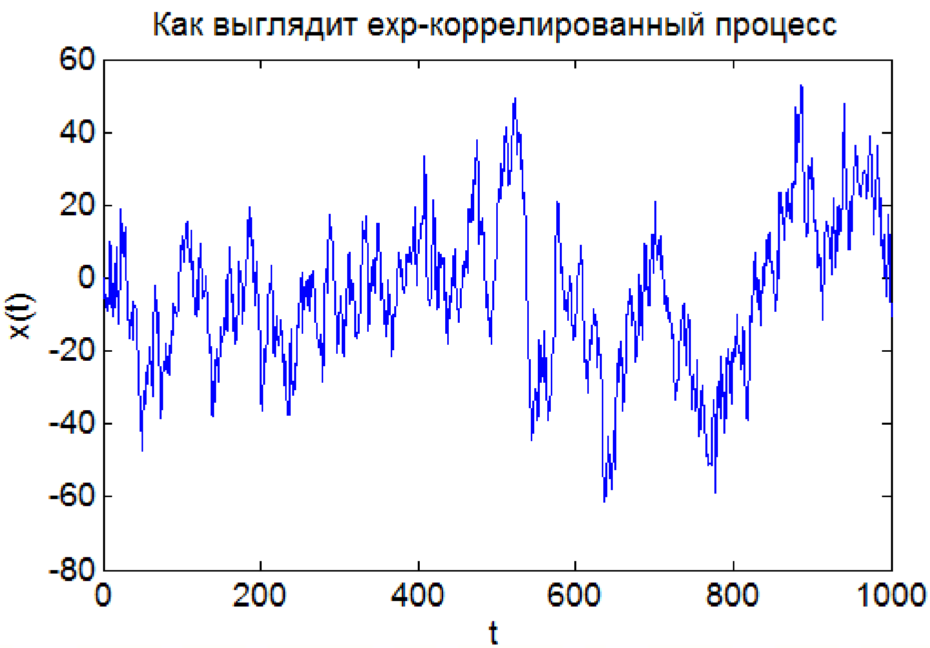
$$w_k = w_{k-1}+\xi_k T, \qquad \xi_k \to \mathbb{N}(0,\sigma_n),\ \sigma_\xi^2=\frac{N_0}{2T}$$

Экспонециально коррелированный процесс

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=-\alpha x(t)+\sqrt{2\alpha\sigma^2}\,\xi(t);\qquad R_x(\tau)=\sigma^2\exp(-\alpha\tau)$$

$$x_k=\exp(-\alpha T)\,x_{k-1}+\sigma\sqrt{1-\exp(-2\alpha T)}\,\xi_{k-1}$$





Марковские модели динамики навигационных параметров

1. Модель задержки, фазы и доплеровского смещения частоты сигнала НКА

2. Модель нестабильности ОГ

3. Модель изменения координат и вектора скорости потребителя

Все перечисленные модели сообщений даются как правило в виде многомерного марковского процесса

Модель изменения задержки, фазы и частоты сигнала от НКА

$$y(t) = A \cdot G\left(t - \tau(t)\right)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right) + n(t)$$

$$\tau(t) = R(t)/c; \quad \varphi(t) = \varphi_0 - \frac{\omega_0}{c}R(t), \quad \varphi_0 \subset U(-\pi, \pi)$$

$\omega_\partial(t) = \mathrm{d}\varphi(t)/\mathrm{d}t$ - доплеровское смещение частоты

Статистическая модель изменения дальности R(t):

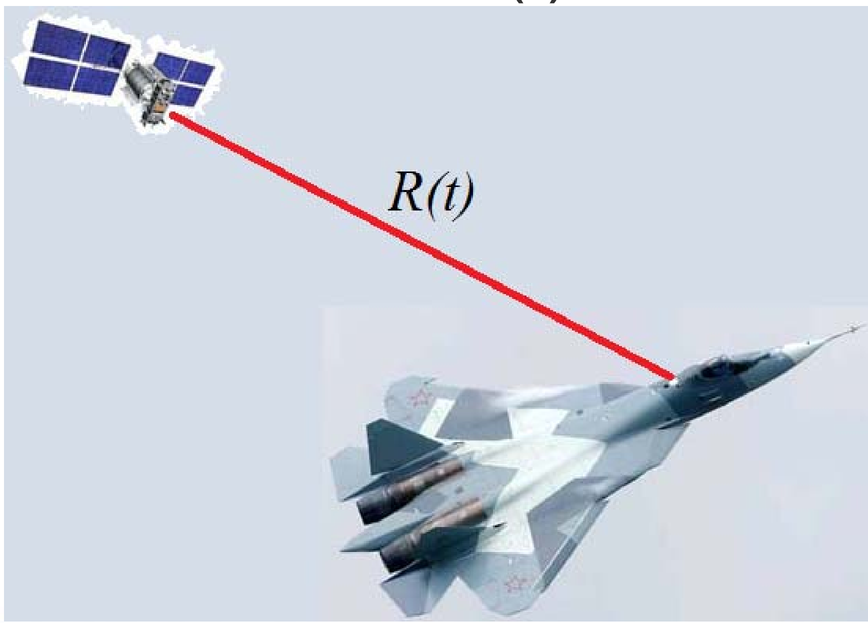
$$\frac{dR}{dt} = V(t),$$

$$\frac{dV}{dt} = a(t),$$

$$\frac{da}{dt} = -\alpha a(t) + \alpha\xi(t),$$

$\xi(t)$ – БГШ с односторонней СПМ N_ξ

$$\boxed{\begin{array}{l} 1/\alpha = 1 \ldots 60 \text{ с} \\ \sigma_a = \sqrt{\alpha N_\xi / 4} = 1 \ldots 50 \text{ м/с}^2 \end{array}}$$



Векторно-матричное описание статистической модели *R(t)*

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} R & V & a \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Для непрерывного времени

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x} + \mathbf{\Gamma}\xi(t)$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{vmatrix}$$

Для дискретного времени

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\zeta_{k-1}$$

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\alpha T} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_a \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2\alpha T}} \end{vmatrix}$$

$$\zeta_k \subset N(0,1)$$

$$T = t_k - t_{k-1} = 1 \ldots 100 \text{ ì ñ}$$

Модель нестабильности опорного генератора

$\tau_{ОГ}(t)$ – вклад ОГ в наблюдаемую псевдозадержку сигнала

$\varphi_{ОГ}(t)$ – вклад ОГ в наблюдаемую псевдофазу сигнала*

$\omega_{ОГ}(t)$ – вклад ОГ в наблюдаемую псевдодоплеровскую частоту*

*относительно несущей $f_0 = 1602$ МГц

Для непрерывного времени

$$\frac{d\tau_{ОГ}(t)}{dt} = -\frac{\omega_{ОГ}(t)}{\omega_0}$$

$$\frac{d\varphi_{ОГ}(t)}{dt} = \omega_{ОГ}(t)$$

$$\frac{d\omega_{ОГ}(t)}{dt} = \xi_{ОГ}(t)$$

$\xi_{ОГ}(t)$ - БГШ с односторонней СПМ $S_{ОГ}$

$S_{ОГ} = 0,5...500$ рад^2/с^3

Для дискретного времени

$$\tau_{ОГ,k} = \tau_{ОГ,k-1} - \frac{\omega_{ОГ,k-1}T}{\omega_0}$$

$$\varphi_{ОГ,k} = \varphi_{ОГ,k-1} + \omega_{ОГ,k-1}T$$

$$\omega_{ОГ,k} = \omega_{ОГ,k-1} + \xi_{ОГ,k-1}T$$

$\xi_{ОГ}(t)$ - ДБГШ с односторонней СПМ $S_{ОГ}$

$$\left(\sigma_\xi = \sqrt{\frac{S_{ОГ}}{2T}}\right)$$

Модель изменения координат и вектора скорости потребителя в дискретном времени

$$x_k = x_{k-1} + v_{x,k-1}T, \quad y_k = y_{k-1} + v_{y,k-1}T, \quad z_k = z_{k-1} + v_{z,k-1}T,$$

$$v_{x,k} = v_{x,k-1} + a_{x,k-1}T, \quad v_{y,k} = v_{y,k-1} + a_{y,k-1}T, \quad v_{z,k} = v_{z,k-1} + a_{z,k-1}T,$$

$$a_{x,k} = \mathrm{e}^{-\alpha T} \cdot a_{x,k-1} + \sigma_a \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2\alpha T}} \cdot \zeta_{x,k-1},$$

$$a_{y,k} = \mathrm{e}^{-\alpha T} \cdot a_{y,k-1} + \sigma_a \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2\alpha T}} \cdot \zeta_{y,k-1},$$

$$a_{z,k} = \mathrm{e}^{-\alpha T} \cdot a_{z,k-1} + \sigma_a \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2\alpha T}} \cdot \zeta_{z,k-1}.$$