

# Лекция 5. Различение сигналов

Различение 2-х детерминированных сигналов

Постановка задачи:

$$y(t) = \vartheta S_1(t) + (1 - \vartheta) S_2(t) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad \vartheta = \{0, 1\}$$

Заданы сигналы  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ , и априорная вероятность приема сигнала  $S_1(t)$ :  $P(\vartheta = 1) = P_{ap}(1)$ .  $n(t)$  - БГШ с СПМ  $N_0$

Задача сводится к задаче оценивания бинарного параметра  $\vartheta$  и решается аналогично задаче обнаружения сигнала. Решающее правило ----->

$$\rho(\mathbf{Y}_0^T) > \left( \frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)} = h \right)$$

# Отношение правдоподобия для задачи различения 2-х сигналов

$$p(\mathbf{Y}_0^T | \mathfrak{G} = 1) = k \exp \left\{ -\frac{E_1}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) S_1(t) dt \right\}, \quad E_1 = \int_0^T S_1^2(t) dt \longleftarrow$$

$$p(\mathbf{Y}_0^T | \mathfrak{G} = 0) = k \exp \left\{ -\frac{E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) S_2(t) dt \right\}, \quad E_2 = \int_0^T S_2^2(t) dt \longleftarrow$$

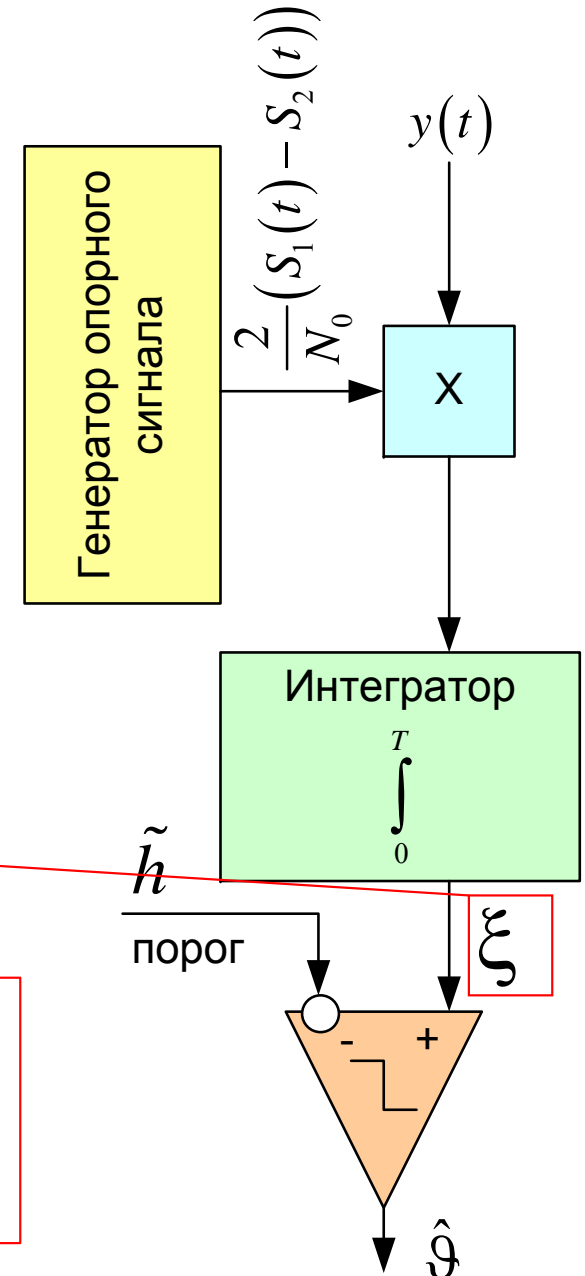
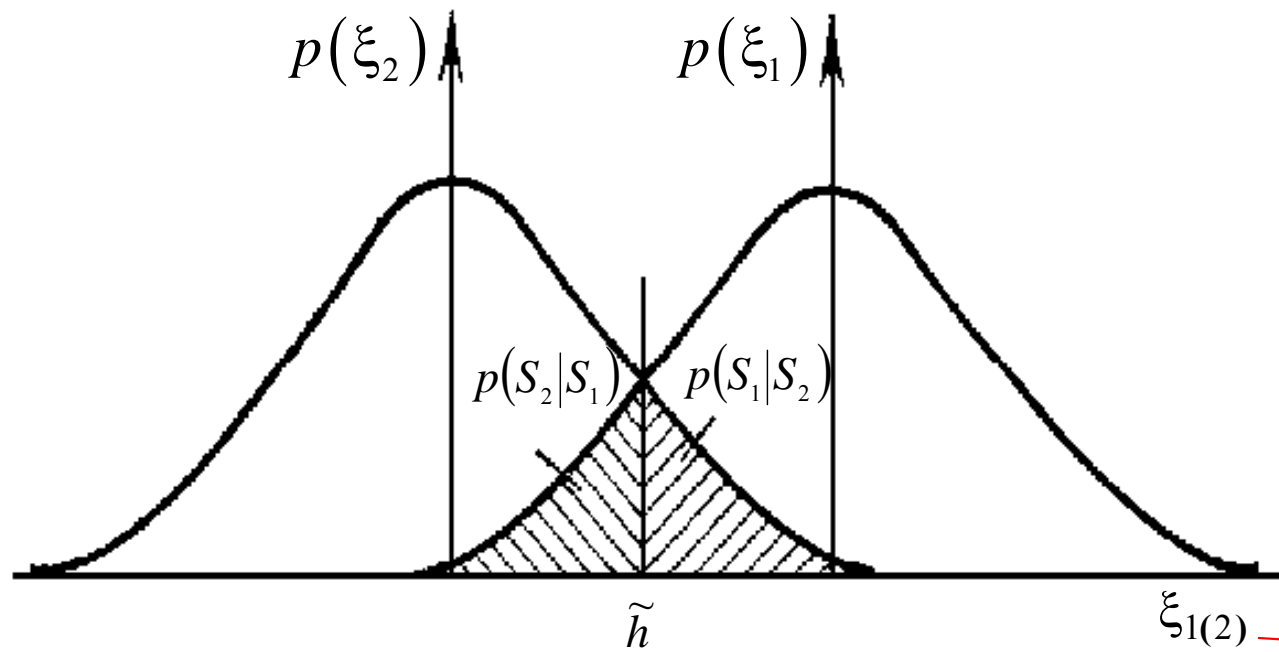
$$\rho(\mathbf{Y}_0^T) = \frac{p(\mathbf{Y}_0^T | \mathfrak{G} = 1)}{p(\mathbf{Y}_0^T | \mathfrak{G} = 0)} = \exp \left\{ -\frac{E_1 - E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) (S_1(t) - S_2(t)) dt \right\}$$

Энергии сигналов

Решающее правило (алгоритм) после логарифмирования:

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) (S_1(t) - S_2(t)) dt > \ln \frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)} + \frac{E_1 - E_2}{N_0} = \tilde{h}$$

# Вероятность суммарной ошибки различения



$$P_{\text{ош}} = P_{\text{ap}}(1) \int_{-\infty}^{\tilde{h}} p(\xi_1) d\xi_1 + P_{\text{ap}}(0) \int_{\tilde{h}}^{\infty} p(\xi_2) d\xi_2$$

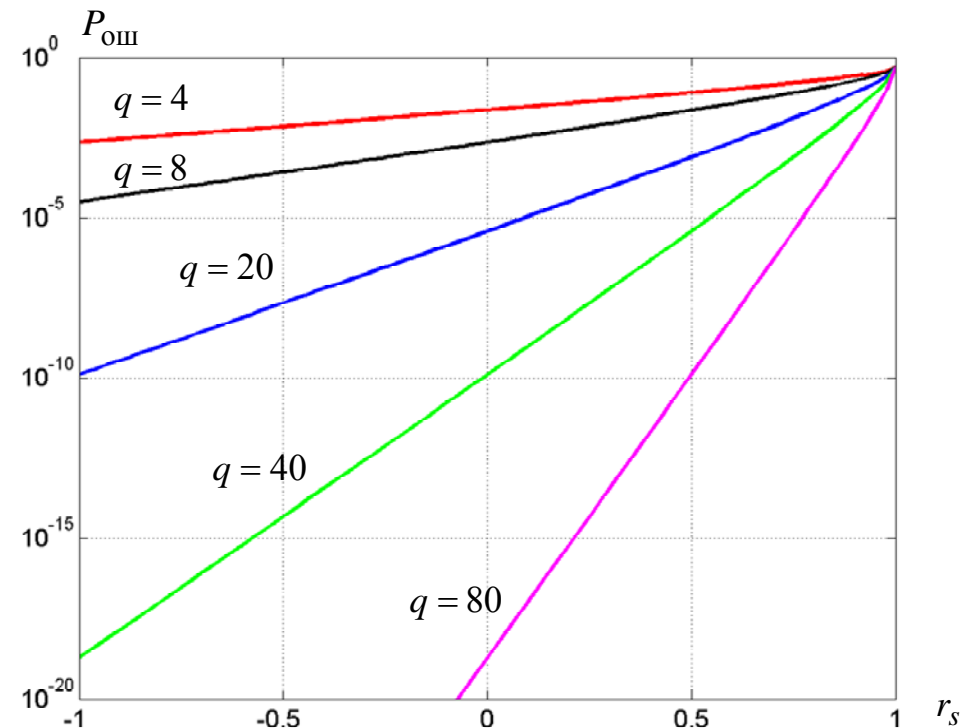
# Вероятность суммарной ошибки различения

Частный случай:  $E_1 = E_2 = E$ ,  $P_{ap}(1) = P_{ap}(0) = 0,5$ ,

$q = E / N_0$  - отношение с/ш

$r_s = \frac{1}{E} \int_0^T S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau$  - взаимная энергия между сигналами

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{q(1 - r_s)}\right)$$



# Вероятности ошибки для разных видов модуляции

**ФМ2:**  $S_1(t) = A \cos(\omega t)$ ,  $S_2(t) = -A \cos(\omega t)$ ,  $r_s = -1$ ,  $P_{\text{ош}} = 1 - \Phi(\sqrt{2q})$

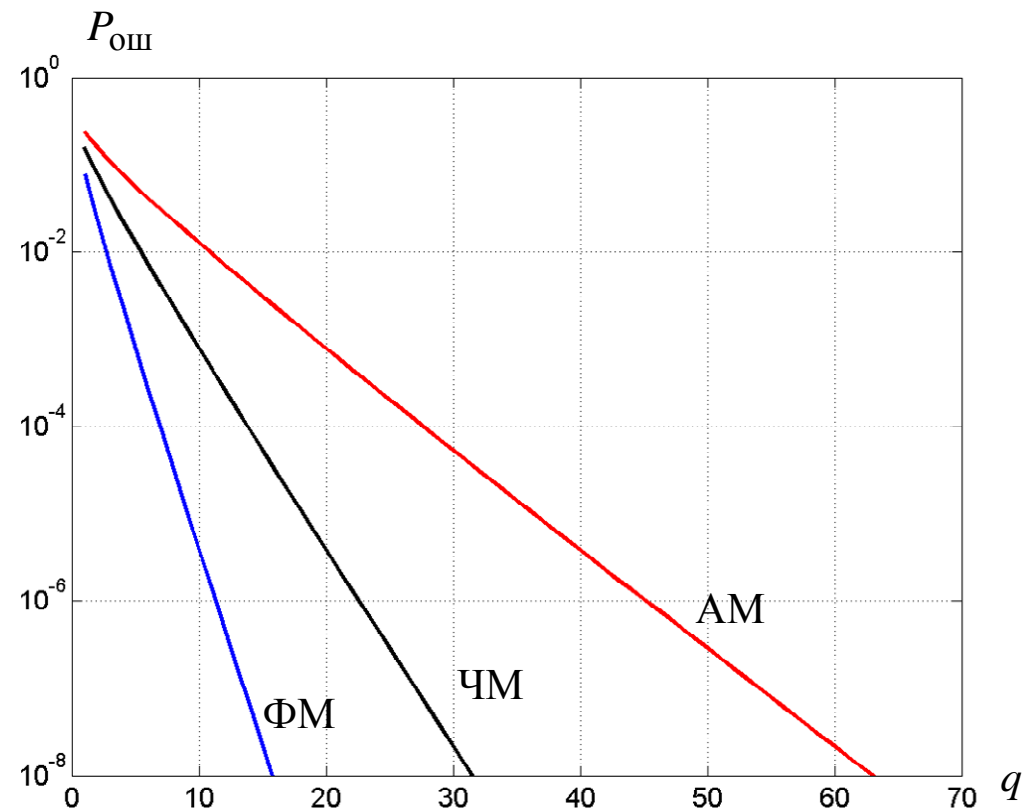
**ЧМ:**  $S_1(t) = A \cos(\omega_1 t)$ ,  $S_2(t) = A \cos(\omega_2 t)$ ,  $r_s \approx 0$  при  $(\omega_2 - \omega_1)T \gg 1$ ,  
 $P_{\text{ош}} = 1 - \Phi(\sqrt{q})$

**АМ:**

$$S_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$S_2(t) = 0, \quad (E_2 = 0) \neq \left( E_1 = \frac{A^2 T}{2} \right)$$

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi(0,5\sqrt{2q})$$



# Жизненный пример:

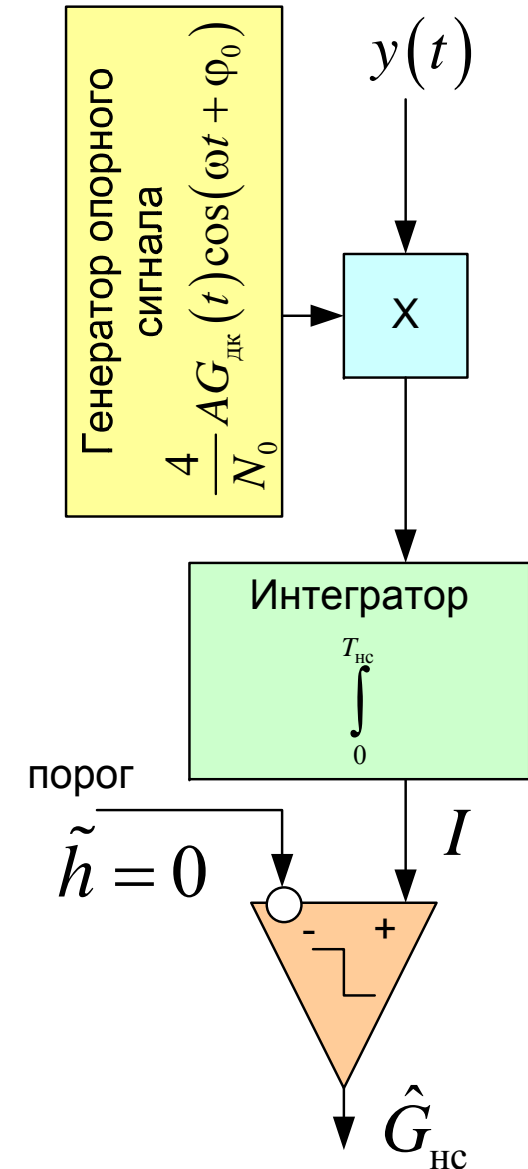
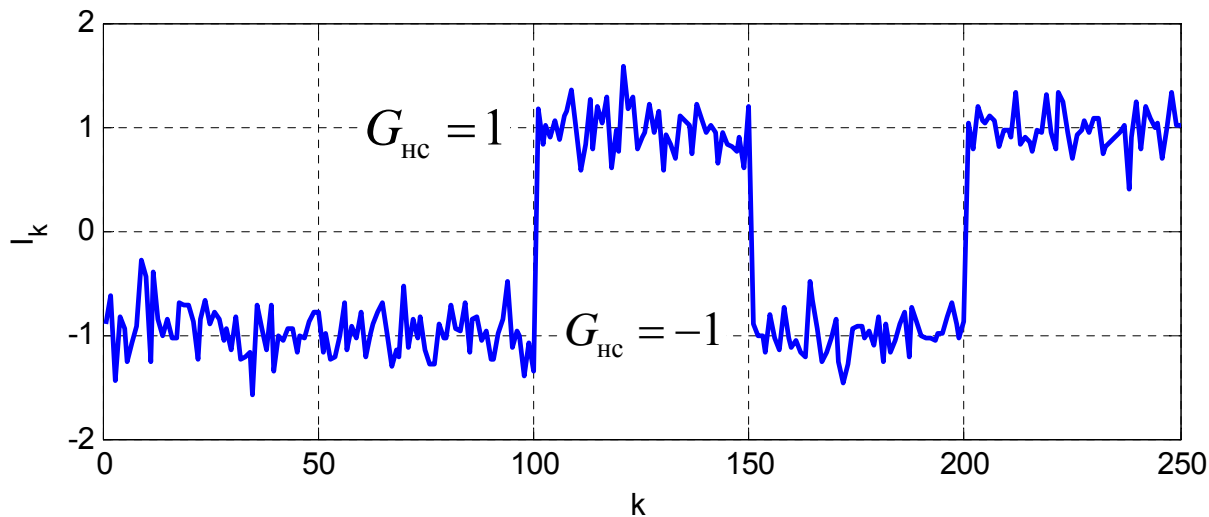
Выделение бит навигационного сообщения сигнала СРНС

$$S(t) = AG_{\text{НС}} \cdot G_{\text{ДК}}(t) \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$t \in [0, T_{\text{НС}}], \quad G_{\text{НС}} = \{+1, -1\} - ?$$

$$S_1(t) = AG_{\text{ДК}}(t) \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$S_2(t) = -AG_{\text{ДК}}(t) \cos(\omega t + \varphi_0)$$



# Различение $m$ детерминированных сигналов

$$y(t) = S_i(t) + n(t), \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [0, T]$$

$i$  – случайный дискретный параметр, принимающий значения  $1 \dots m$

Априорные вероятности приема заданы для каждого  $i$ -го сигнала:

$$P_{ap}(S_i(t)) = P_{ap,i}$$

$$\sum_{i=1}^m P_{ap,i} = 1$$

Требуется найти  $i$ , а точнее решающее правило для оценивания  $i$ .

# Решающее правило

Примем байесовское решающее правило для простой функции потерь: максимум апостериорной вероятности (см. занятие 3).

$$\hat{i} = \arg \max_i \left( P(i | \mathbf{Y}_0^T) \right)$$

По формуле Байеса:  $P(i | \mathbf{Y}_0^T) p(\mathbf{Y}_0^T) = p(\mathbf{Y}_0^T | i) P(i)$

$$P(i | \mathbf{Y}_0^T) = c_1 \cdot \rho(\mathbf{Y}_0^T | i) P_{ap,i} = c_1 \cdot P_{ap,i} \cdot \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T S_i(t) (y(t) - 0,5S_i(t)) dt \right\}$$

$$\hat{i} = \arg \max_i P(i | \mathbf{Y}_0^T) = \arg \max_i \left( \ln \left( P(i | \mathbf{Y}_0^T) \right) \right)$$

$$\ln \left( P(i | \mathbf{Y}_0^T) \right) = \ln(c_1) + \ln(P_{ap,i}) + \frac{2}{N_0} \int_0^T S_i(t) (y(t) - 0,5S_i(t)) dt$$

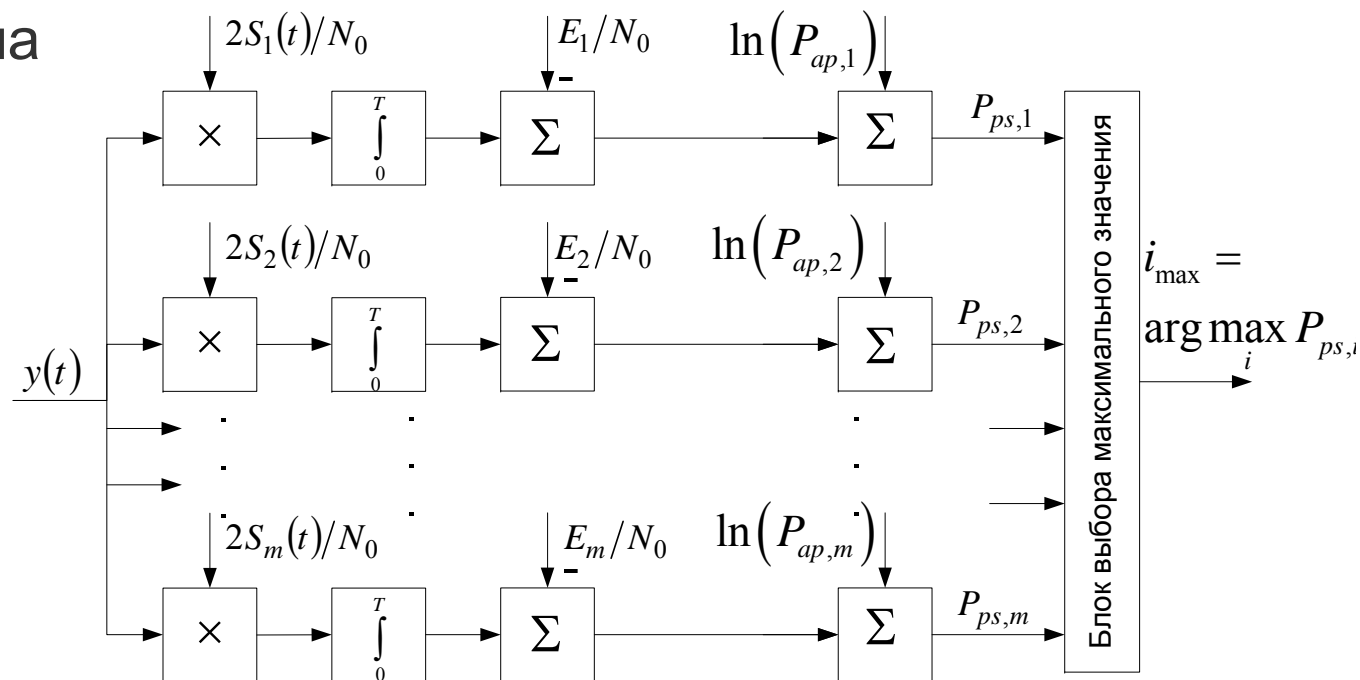
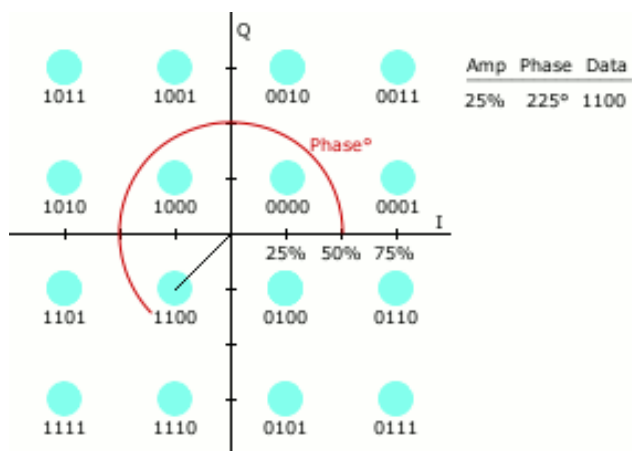


# Алгоритм различения

$$\begin{aligned} \frac{2}{N_0} \int_0^T S_i(t) (y(t) - 0,5S_i(t)) dt &= \frac{2}{N_0} \int_0^T S_i(t) y(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T S_i^2(t) dt = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^T S_i(t) y(t) dt - \frac{E_i}{N_0} = u_{ki} \end{aligned}$$

$$\hat{i} = \arg \max_i \left( \ln(\cancel{c_1}) + \ln(P_{ap,i}) + \frac{2}{N_0} \int_0^T S_i(t) y(t) dt - \frac{E_i}{N_0} \right)$$

Пример: приём сигнала  
КАМ16 (QAM16)



# Разрешение сигналов

## «Разрешение – обнаружение» сигналов

- задача обнаружения сигнала  $S_1(t)$  на фоне мешающих сигналов  $S_i(t)$ ,  $i = \overline{2, m}$  и аддитивного шума  $n(t)$

Рассмотрим задачу с двумя сигналами:

$$y(t) = \vartheta S_1(t) + S_2(t) + n(t), \quad t \in [0, T],$$

$$P(\vartheta = 1) = P_{ap}(1), \quad P(\vartheta = 0) = P_{ap}(0),$$

$S_1(t), S_2(t)$  - известны,  $n(t)$  - БГШ с СПМ  $N_0$

Общее решение двухальтернативной задачи обнаружения известно:

$$\hat{\vartheta} = \left\{ \rho(\mathbf{Y}_0^T) \geq \left( \frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)} \equiv h_0 \right) \right\}$$

# «Разрешение-обнаружение» сигналов. Отношение правдоподобия

$$\rho(\mathbf{Y}_0^T) = \frac{p(\mathbf{Y}_0^T | \mathfrak{G} = 1)}{p(\mathbf{Y}_0^T | \mathfrak{G} = 0)}$$

$p(\mathbf{Y}_0^T | \mathfrak{G} = 1) = k \exp \left\{ -\frac{2}{N_0} \int_0^T (S_1(t) + S_2(t))(y(t) - 0,5(S_1(t) + S_2(t))) dt \right\}$   
 $p(\mathbf{Y}_0^T | \mathfrak{G} = 0) = k \exp \left\{ -\frac{2}{N_0} \int_0^T S_2(t)(y(t) - 0,5S_2(t)) dt \right\}$

$$\rho(\mathbf{Y}_0^T) = \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T S_1(t)(y(t) - 0,5S_1(t)) dt - \frac{2}{N_0} \int_0^T S_1(t)S_2(t) dt \right\}$$

$\hat{\mathfrak{G}} = \{ \rho(\mathbf{Y}_0^T) \geq h_0 \}$  - отсюда алгоритм оптимального обнаружителя:

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)S_1(t)dt \geq \frac{E_1}{N_0} + \ln(h_0) + \frac{2E_{12}}{N_0}$$

- по сравнению с обычным обнаружителем изменился только порог обнаружения

# «Разрешение-измерение» СИГНАЛОВ.

- задача оценки параметров  $\lambda$  сигнала  $S(t, \lambda)$  на фоне аддитивного шума  $n(t)$  и мешающего сигнала  $S(t, \lambda')$

Рассмотрим наблюдение:

$$y(t) = S(t, \lambda) + S(t, \lambda') + n(t), \quad t \in [0, T],$$

структура  $S(t)$  известна,  $n(t)$  - БГШ с СПМ  $N_0$

требуется оценить  $\lambda$

Пример: многолучёвость

