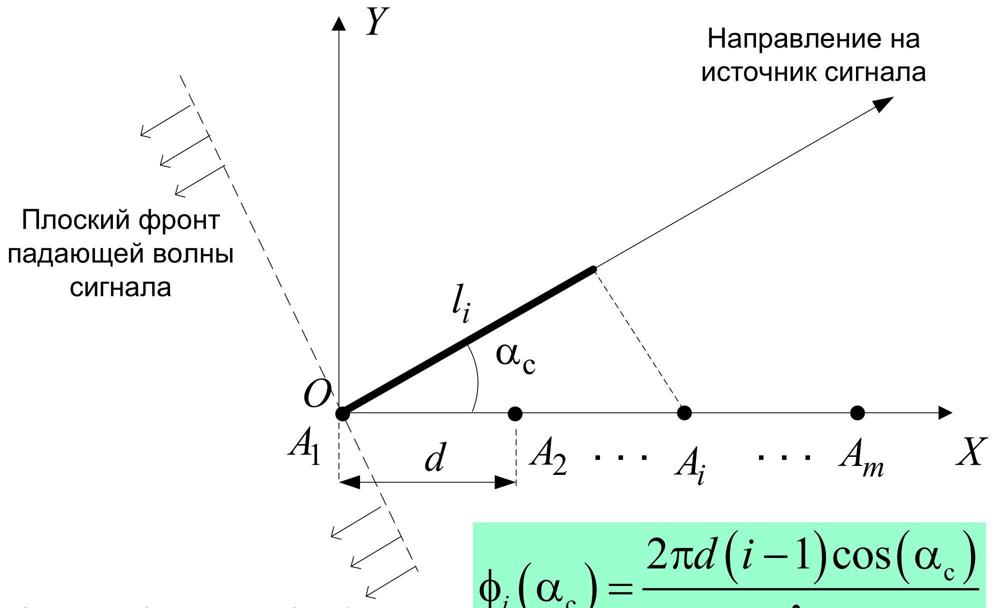
Лекция 15. Алгоритм оптимальной фильтрации пространственно-временных сигналов

(при наличии пространственно-распределенных помех)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ



Наблюдения комплексных амплитуд пространственно-временного сигнала на выходе многоканального цифрового квадратурного приемника:

$$\phi_i(\alpha_c) = \frac{2\pi d (i-1)\cos(\alpha_c)}{\lambda_0}$$

$$\dot{y}_i(t_k, x_i) = \sqrt{P_c}\,\dot{S}_н(t_k, \lambda) e^{j\phi_i(\alpha_c)} + \sum_{j=1}^{p} \dot{S}_{п_j}(t_k, x_i) + \dot{n}_i(t_k)$$

$\dot{S}_{п_j}(t_k, x_i)$ - комплексная амплитуда j-й помехи на выходе i-го АЭ

p - общее число помех; $i = \overline{1,m}$ - число антенных элементов в решётке

Постановка задачи

Объединим наблюдения в вектор:

$$\dot{\mathbf{y}}_k = \left| \dot{y}_1(t_k, x_1)\ \dot{y}_2(t_k, x_2)\ \ldots\ \dot{y}_m(t_k, x_m) \right|^{\mathrm{T}}$$

Введём вектор комплексных амплитуд помех

$$\dot{\mathbf{S}}_{\text{п},k} = \left| \dot{S}_{\text{п}_1}(t_k)\ \dot{S}_{\text{п}_2}(t_k)\ \ldots\ \dot{S}_{\text{п}_p}(t_k) \right|^{\mathrm{T}}, \quad M\left[\dot{\mathbf{S}}_{\text{п},k}\dot{\mathbf{S}}^{*\mathrm{T}}_{\text{п},k}\right] = \dot{\mathbf{V}}_{\text{п}}$$

Комплексная амплитуда j-й помехи на выходе i-го элемента АР равна:

$$\dot{S}_{\text{п}_{j,i}}(t_k, x_i) = \dot{S}_{\text{п}_j}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_j i}(\alpha_{\text{п}_j})}, \quad \phi_{\text{п}_j i}(\alpha_{\text{п}_j}) = \frac{2\pi d(i-1)\cos(\alpha_{\text{п}_j})}{\lambda_0}, \quad j = \overline{1,p}, \quad i = \overline{1,m}$$

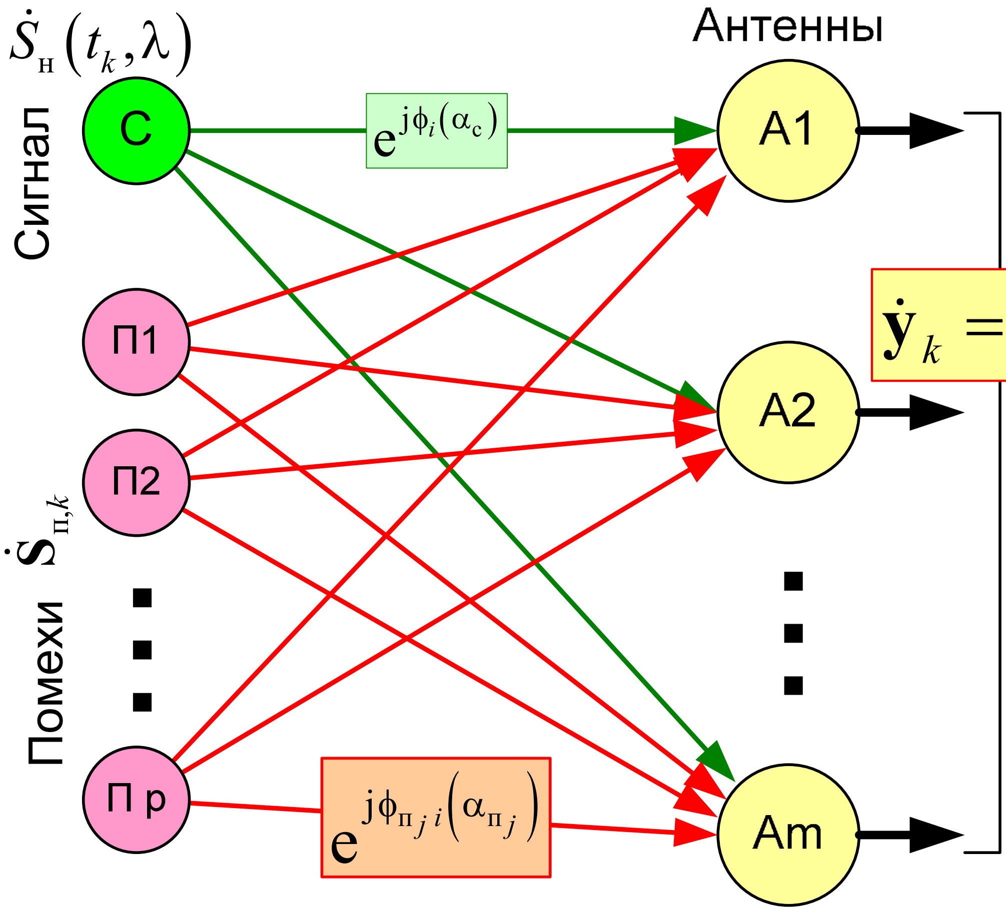
Введём матрицу

$$\dot{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}}) = \begin{vmatrix} \exp\{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_1 1}(\alpha_{\text{п}_1})\} & \exp\{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_2 1}(\alpha_{\text{п}_2})\} & \ldots & \exp\{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_p 1}(\alpha_{\text{п}_p})\} \\ \exp\{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_1 2}(\alpha_{\text{п}_1})\} & \exp\{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_2 2}(\alpha_{\text{п}_2})\} & \ldots & \exp\{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_p 2}(\alpha_{\text{п}_p})\} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \exp\{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_1 m}(\alpha_{\text{п}_1})\} & \exp\{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_2 m}(\alpha_{\text{п}_2})\} & \ldots & \exp\{\mathrm{j}\phi_{\text{п}_p m}(\alpha_{\text{п}_p})\} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}} = \left| \alpha_{\text{п}_1}\ \alpha_{\text{п}_2}\ \ldots\ \alpha_{\text{п}_p} \right|^{\mathrm{T}}$$

- вектор <u>известных</u> угловых направлений на помехи

Постановка задачи



Записываем наблюдения в векторно-матричном виде:

$$\dot{\mathbf{y}}_k = \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{с})\dot{S}_{н}(t_k,\boldsymbol{\lambda}) + \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{п})\dot{\mathbf{S}}_{п,k} + \dot{\mathbf{n}}_k$$

Введём суммарную помеху (смесь помеха+шум):

$$\dot{\mathbf{n}}_{\Sigma,k} = \dot{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\alpha}_{п})\dot{\mathbf{S}}_{п,k} + \dot{\mathbf{n}}_k$$

с корреляционной матрицей:

$$M\left[\dot{\mathbf{n}}_{\Sigma,k}\dot{\mathbf{n}}_{\Sigma,l}^{*\mathrm{T}}\right] = \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{п})\delta_{k,l},\ \text{где}\ \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\alpha_{п}) = \dot{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\alpha}_{п})\dot{\mathbf{V}}_{п}\dot{\mathbf{C}}^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}_{п}) + \sigma_n^2\mathbf{I}$$

Отсюда наблюдения можно записать в стандартном виде:

$$\dot{\mathbf{y}}_k = \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{с})\dot{S}_{н}(t_k,\boldsymbol{\lambda}) + \dot{\mathbf{n}}_{\Sigma,k}\ \text{где}\ \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{с}) = \sqrt{P_{с}}\left|e^{j\phi_1(\alpha_c)}\quad e^{j\phi_2(\alpha_c)}\quad \ldots\quad e^{j\phi_m(\alpha_c)}\right|^{\mathrm{T}}$$

Постановка задачи

Таким образом, воздействие помех представлено как воздействие обычных шумов, имеющих взаимные корреляции

Отобразим вектор информативных параметров $\boldsymbol{\lambda}$ в пространство состояний **x** и запишем уравнение динамики для вектора состояний **x** в виде многомерного марковского процесса:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1}\right) + \mathbf{g}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1}\right)\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \quad \mathbf{x}\left(t_0\right) = \mathbf{x}_0,$$

$\boldsymbol{\xi}_{k-1}$ - векторный ДБГШ: $M\left[\boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_l^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{D}_{\xi}\delta_{kl}$

$\mathbf{f}_k\left(\mathbf{x}_k\right), \quad \mathbf{g}_k\left(\mathbf{x}_k\right) -$ известные векторные функции

По комплексным амплитудам наблюдений от элементов АР $\dot{\mathbf{y}}_k$ требуется решить задачу оптимальной нелинейной фильтрации вектора состояний **x**

Особенности, на которые стоит обратить внимание

* $\alpha_{\text{п}_j}$ – углы направления на помехи, которые считаются известными. Их p штук.

* $\alpha_{\text{с}}$ – угол направления на сигнал, который также считается известным. Он один.

* Так как у нас 2D задача с линейной АР, то распределение фазы в АР зависит только от одного угла. В реальном 3D мире распределение фазы в АР будет зависеть от 2-х углов - азимута и угла места.

* Матрица $\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}})$ является *эрмитовой*, т.е. $\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}})=\left(\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}})\right)^{*\text{т}}$ (обратная матрица $\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}$ также является эрмитовой)

Пространственно-временной фильтр

Решением поставленной задачи является алгоритм оптимальной нелинейной фильтрации в виде расширенного фильтра Калмана (РФК) – см. лекцию 10

Запишем уравнение шага оценивания в виде:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}\,\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{S}}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{*\mathrm{т}} \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\left(\dot{\mathbf{y}}_k - \dot{\mathbf{S}}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)\right)\right\}, \quad \text{где}$$

$$\dot{\mathbf{S}}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k) = \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\mathrm{c}})\dot{S}_{\mathrm{н}}(t_k, \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k), \quad \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{S}}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{*\mathrm{т}} = \mathbf{c}^{\mathrm{т}}\left(\frac{\partial \dot{S}_{\mathrm{н}}(t_k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^{*\mathrm{т}} \dot{\mathbf{H}}^{*\mathrm{т}}(\alpha_{\mathrm{c}}),$$

$$\text{отсюда}\quad \hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}\mathbf{c}^{\mathrm{т}}\,\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial \dot{S}_{\mathrm{н}}(t_k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^{*\mathrm{т}} \dot{\mathbf{H}}^{*\mathrm{т}}(\alpha_{\mathrm{c}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\left(\dot{\mathbf{y}}_k - \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\mathrm{c}})\dot{S}_{\mathrm{н}}(t_k, \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)\right)\right\}$$

«Пространственная» часть

Рассмотрим выражение в фигурных скобках:

$$\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\left(\dot{\mathbf{y}}_k-\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})\dot{S}_{\text{н}}(t_k,\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)\right)=\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{y}}_k-\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})\dot{S}_{\text{н}}(t_k,\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)=$$

$$=\frac{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})}\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{y}}_k-\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})\dot{S}_{\text{н}}(t_k,\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)=$$

$$=\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})\cdot\left[\frac{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})}\dot{\mathbf{y}}_k-\dot{S}_{\text{н}}(t_k,\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)\right]=$$

$$=\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})\cdot\left[\boldsymbol{\beta}^{*\text{т}}\dot{\mathbf{y}}_k-\dot{S}_{\text{н}}(t_k,\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)\right],\quad\text{где}\quad\boldsymbol{\beta}(\alpha_{\text{с}},\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}})=\frac{\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}})\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}})\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\text{с}})}$$

Введём эквивалентное наблюдение:

$$\boxed{\dot{y}_{\text{экв},k}=\dot{\boldsymbol{\beta}}^{*\text{т}}(\alpha_{\text{с}},\alpha_{\text{п}})\dot{\mathbf{y}}_k}$$

- это есть не что иное как алгоритм работы блока пространственной обработки сигналов!!!

$\dot{\boldsymbol{\beta}}(\alpha_{\text{с}},\alpha_{\text{п}})$ - называется вектором весовых коэффициентов

Эквивалентное наблюдение

Распишем эквивалентное наблюдение через сигнальную и шумовую составляющие:

$$\dot{y}_{\text{экв},k} = \dot{\boldsymbol{\beta}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с},\alpha_\text{п})\dot{\mathbf{y}}_k = \frac{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_\text{с})}\left(\dot{\mathbf{H}}(\alpha_\text{с})\dot{S}_\text{н}(t_k,\boldsymbol{\lambda}_k)+\dot{\mathbf{n}}_{\Sigma,k}\right)=$$

$$= \dot{S}_\text{н}(t_k,\boldsymbol{\lambda}_k) + \frac{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_\text{с})}\dot{\mathbf{n}}_{\Sigma,k} = \dot{S}_\text{н}(t_k,\boldsymbol{\lambda}_k)+\dot{n}_{\text{экв},k}$$

$$\dot{n}_{\text{экв},k} = \frac{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_\text{с})}\dot{\mathbf{n}}_{\Sigma,k} - \text{шум эквивалентных наблюдений}$$

Найдём дисперсию шума эквивалентных наблюдений:

$$M\left[\dot{n}_{\text{экв},k}\cdot\dot{n}^*_{\text{экв},k}\right] = \frac{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_\text{с})} M\left[\dot{\mathbf{n}}_{\Sigma,k}\dot{\mathbf{n}}^{*\text{т}}_{\Sigma,k}\right]\left(\frac{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_\text{с})}\right)^{*\text{т}} =$$

$$= \frac{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}\cdot\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{H}}(\alpha_\text{с})}{\left(\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_\text{с})\right)^2} = \left(\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}(\alpha_\text{с})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_\text{с})\right)^{-1} = D_{N\text{экв}}(\alpha_\text{с},\alpha_\text{п})$$

«Временная» часть

С эквивалентными наблюдениями выражение в фигурных скобках упрощается ещё больше:

$$\dot{\mathbf{H}}^{*\mathrm{T}}(\alpha_{\mathrm{c}})\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(\alpha_{\mathrm{c}})\cdot\left[\boldsymbol{\beta}^{*\mathrm{T}}\dot{\mathbf{y}}_k - \dot{S}_{\mathrm{н}}(t_k, \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)\right] = D_{N\text{экв}}^{-1}(\alpha_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{п}})\cdot\left[\dot{y}_{\text{экв},k} - \dot{S}_{\mathrm{н}}(t_k, \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)\right]$$

То есть оказывается, что уравнение шага оценивания фильтра может включать только скалярные эквивалентные наблюдения:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \frac{\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}}{D_{N\text{экв}}(\alpha_{\mathrm{c}}, \alpha_{\mathrm{п}})}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial \dot{S}_{\mathrm{н}}(t_k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^{*\mathrm{T}}\left[\dot{y}_{\text{экв},k} - \dot{S}_{\mathrm{н}}(t_k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)\right]\right\}$$

- это есть шаг оценивания в алгоритме блока временнОй обработки сигналов (на основе РФК)!!!

Блок пространственной обработки сигналов

Вектор весовых коэффициентов (ВВК) может быть выражен через дисперсию шума эквивалентных наблюдений:

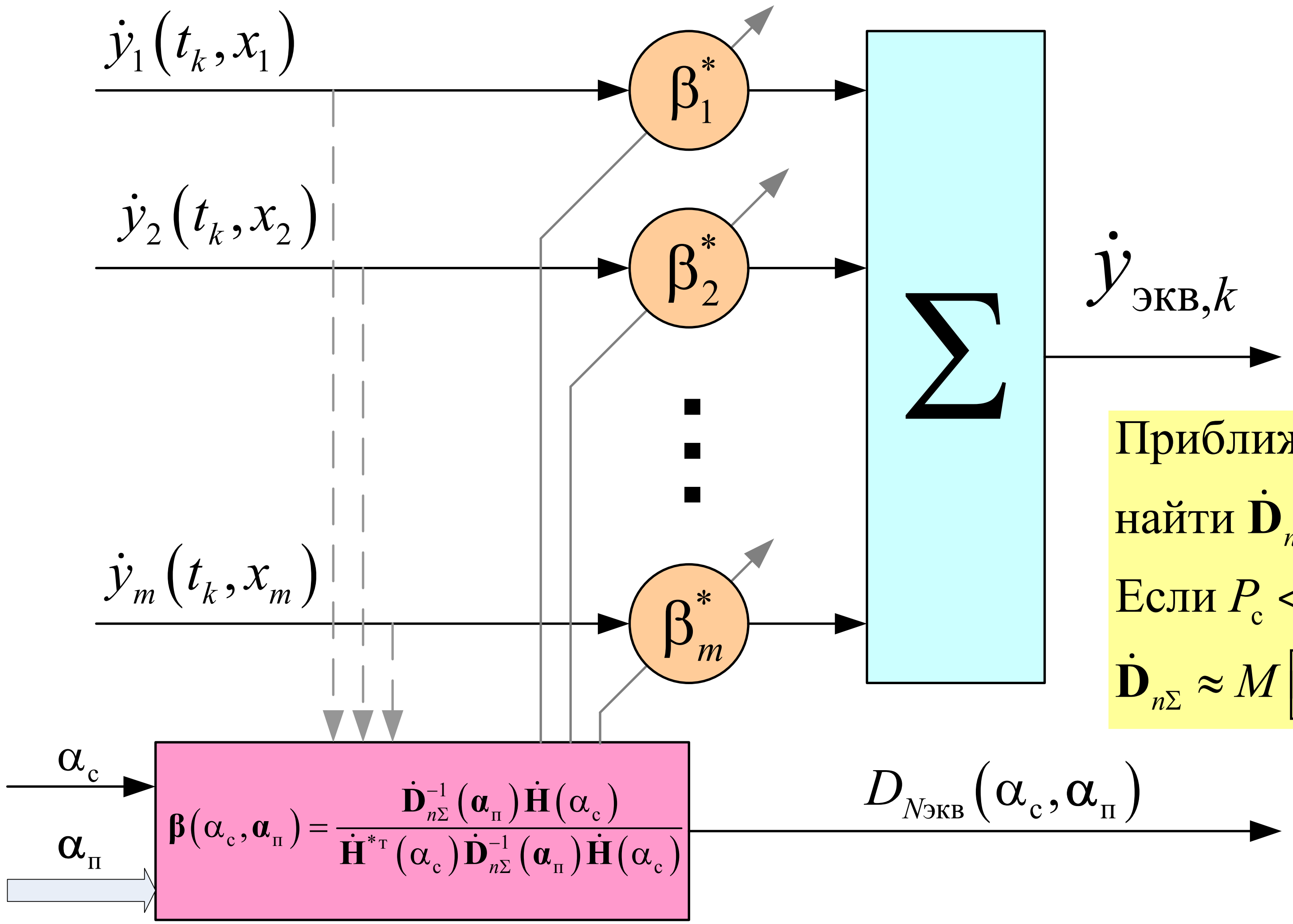
$$\boldsymbol{\beta}\left(\alpha_{\text{с}},\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}}\right)=\frac{\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}}\right)\dot{\mathbf{H}}\left(\alpha_{\text{с}}\right)}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}\left(\alpha_{\text{с}}\right)\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}}\right)\dot{\mathbf{H}}\left(\alpha_{\text{с}}\right)}=D_{N\text{экв}}\left(\alpha_{\text{с}},\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}}\right)\cdot\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}}\right)\dot{\mathbf{H}}\left(\alpha_{\text{с}}\right)$$

Варианты записи алгоритма пространственной обработки:

$$\dot{y}_{\text{экв},k}=\frac{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}\left(\alpha_{\text{с}}\right)\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}}{\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}\left(\alpha_{\text{с}}\right)\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{H}}\left(\alpha_{\text{с}}\right)}\dot{\mathbf{y}}_{k}=\dot{\boldsymbol{\beta}}^{*\text{т}}\left(\alpha_{\text{с}},\alpha_{\text{п}}\right)\dot{\mathbf{y}}_{k}=$$
$$=D_{N\text{экв}}\left(\alpha_{\text{с}},\alpha_{\text{п}}\right)\dot{\mathbf{H}}^{*\text{т}}\left(\alpha_{\text{с}}\right)\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}}\right)\dot{\mathbf{y}}_{k}$$

Важно!!! Блок пространственной обработки максимизирует отношение с/ш эквивалентных наблюдений (без вывода).

Структура блока пространственной обработки сигналов

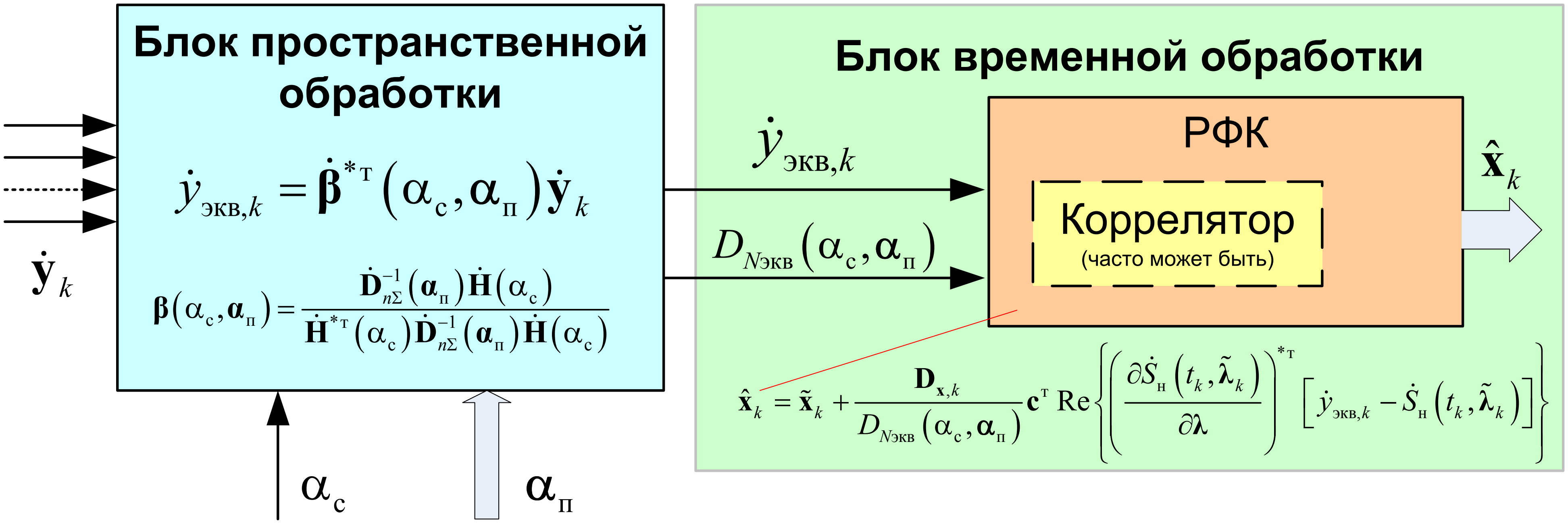


Приближенный способ найти $\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}})$ не зная $\boldsymbol{\alpha}_{\text{п}}$:

Если $P_{\text{с}} \ll P_{\text{помех}}$ то

$$\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma} \approx M\left[\dot{\mathbf{y}}_k \dot{\mathbf{y}}_k^{*\text{т}}\right] \approx \text{ФНЧ}\left(\dot{\mathbf{y}}_k \dot{\mathbf{y}}_k^{*\text{т}}\right)$$

Выводы



Оптимальная пространственно-временная система фильтрации распадается на два раздельных блока - пространственной и временной обработки.

Таким образом, временная система фильтрации – это оптимальный временной фильтр для эквивалентных наблюдений, формирующихся на выходе блока пространственной обработки.