

АЛГОРИТМ СЛЕЖЕНИЯ ЗА ЧАСТОТОЙ НАВИГАЦИОННОГО СИГНАЛА ПРИ МЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРАХ МОЩНОСТИ И ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ ЧАСТОТЫ СИГНАЛА

СИНТЕЗ АЛГОРИТМА САМОПОДСТРАИВАЕМОЙ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СЛЕЖЕНИЯ ЗА ЧАСТОТОЙ СИГНАЛА ГНСС

Постановка задачи

На вход приемника в дискретном времени поступает реализация наблюдений входного процесса, включающего в себя полезный сигнал и шум приемника. Поскольку входной процесс меняется существенно быстрее информативных процессов, целесообразно описывать его в более частой шкале времени с шагом дискретизации $T_d \ll T$ [1, с. 524]. С учетом двойной шкалы времени опишем наблюдения следующим образом

$$\begin{aligned} y_{k,i} &= h_{ок}(t_{k,i} - \tau_k) s_{k,i} + n_{k,i} \\ s_{k,i} &= A_k \cos \{ 2\pi f_o t_{k,i} + \varphi_k + \omega_k i T_d \} \quad , \\ \mathbf{y}_k &= [y_{k,0} \dots y_{k,N-1}]^T, \mathbf{Y}_0^k = [\mathbf{y}_0^T, \mathbf{y}_1^T \dots \mathbf{y}_k^T] \end{aligned} \quad (1)$$

где $y_{k,i}$ — наблюдения входного процесса; $n_{k,i}$ — дискретный белый гауссовский шум (ДБГШ) с нулевым мат. ожиданием и дисперсией σ_n^2 ; $h_{ок}(t_{k,i} - \tau_k)$ - модуляция дальномерным кодом; τ_k - задержка сигнала; A_k — амплитуда сигнала; φ_k — фаза [рад]; ω_k — доплеровское смещение частоты [рад/с]; f_o — несущая частота радионавигационного сигнала; \mathbf{y}_k — вектор сгруппированных наблюдений на интервале $\overline{t_{k,0}, t_{k,N-1}}$; \mathbf{Y}_0^k — реализация наблюдений от начального момента времени $t_{0,0}$ до момента времени $t_{k,N-1}$.

Рассмотрим задачу фильтрации частоты сигнала в тактовые моменты времени $t_{k,0}$, $k = 1, 2, \dots$, принимая следующую априорную модель для случайных процессов.

В качестве ОСШ, выберем отношение мощности сигнала P_s к односторонней спектральной плотности внутреннего шума приемника N_0 , выраженное в дБГц

$q = 10 \log_{10} \left(\frac{P_s}{N_0} \right)$. Изменение данного параметра во времени можно представить в

виде винеровского процесса

$$q_k = q_{k-1} + \zeta_{k-1} T, \quad (2)$$

где ζ_{k-1} — ДБГШ с нулевым математическим ожиданием (МО) и известным среднеквадратическим отклонением (СКО) σ_ζ .

Амплитуду сигнала A_k можно выразить через q_k как

$$A_k = \sqrt{4T \sigma_n^2 10^{0.1 q_k}}. \quad (3)$$

Модель изменения частоты зададим также винеровским процессом

$$\omega_k = \omega_{k-1} + \xi_{\omega, k-1}, \quad (4)$$

где $\xi_{\omega, k-1}$ ДБГШ с нулевым МО и известным СКО $\sigma_{\xi_{\omega, k-1}}$.

Отметим, что шум $\xi_{\omega, k-1}$ в (4) характеризует как динамику изменений скорости приемника относительно передатчика, так и суммарную нестабильность частоты ОГ в приемнике и передатчике. Представим $\sigma_{\xi_{\omega, k-1}}$ как

$$\sigma_{\xi_{\omega, k-1}} = 2\pi f_0 \alpha_{k-1}^\omega, \quad (5)$$

где α_{k-1}^ω переменный параметр, описывающий изменение СКО формирующего шума в модели (4) изменения доплеровского смещения частоты; f_0 несущая частота радионавигационного сигнала.

Полагаем, что параметр α_{k-1}^ω принимает дискретный набор значений $\alpha_{k-1}^\omega = \alpha^{j, \omega}, j = \overline{1, M}$, из за-данной области $[\alpha_{\min}^\omega, \alpha_{\max}^\omega]$, а изменение данного параметра во времени описывается марковской цепью с известными вероятностями перехода $P(\alpha_{k-1}^{j, \omega} | \alpha_{k-2}^{l, \omega})$ от значения $\alpha_{k-2}^{l, \omega}$ в момент времени $k-2$ к значению $\alpha_{k-1}^{j, \omega}$ в момент времени $k-1$ и начальными вероятностями $P(\alpha_0^{j, \omega})$, для которых

$$\sum_{j=1}^M P(\alpha_0^{j, \omega}) = 1, \quad j = \overline{1, M}.$$

Фазу сигнала φ_k примем случайной величиной на каждом k -м шаге с равномерной априорной ПВ $p_{ap}(\varphi_k)$ на интервале $[-\pi, \pi]$. Полагаем, что задержка сигнала τ_k известна.

В сформулированной постановке задачи фильтрации частоты сигнала требуется оценить случайные процессы q_k , ω_k , марковскую цепь $\alpha_{k-1}^{j,\omega}$ с известными статистическими характеристиками и наблюдения (1), на фоне белого гауссовского шума.

Синтез алгоритма слежения за частотой

Введем вектор информативных параметров:

$$\mathbf{x}_k = |q_k \ \omega_k|^T, \quad (6)$$

Общий алгоритм фильтрации вектора состояния можно представить как

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \sum_{j=1}^M \hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^{j,\omega}) P(\alpha^{j,\omega} = \alpha_{k-1}^{j,\omega} | \mathbf{Y}_0^k), \\ P(\alpha^{j,\omega} = \alpha_{k-1}^{j,\omega} | \mathbf{Y}_0^k) &= \frac{\tilde{P}(\alpha^{j,\omega} = \alpha_{k-1}^{j,\omega} | \mathbf{Y}_0^k)}{\sum_{j=1}^M \tilde{P}(\alpha^{j,\omega} = \alpha_{k-1}^{j,\omega} | \mathbf{Y}_0^k)}, \\ \tilde{P}(\alpha^{j,\omega} = \alpha_{k-1}^{j,\omega} | \mathbf{Y}_0^k) &= \tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^{j,\omega}) \times \\ &\times \sum_{l=1}^M P(\alpha_{k-1}^{j,\omega} | \alpha_{k-2}^{l,\omega}) P(\alpha_{k-2}^{l,\omega} = \alpha_{k-2}^{l,\omega} | \mathbf{Y}_0^{k-1}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^{j,\omega})$ условная оптимальная оценка вектора \mathbf{x} при фиксированном значении $\alpha^{j,\omega}$.

Выражения (7) описывают общий алгоритм многоканальной фильтрации процесса \mathbf{x}_k при фиксированных значениях $\alpha^{j,\omega}$, а итоговая оценка $\hat{\mathbf{x}}_k$ вектора состояния в результате усреднения канальных оценок $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^{j,\omega})$ с использованием апостериорных вероятностей $P(\alpha^{j,\omega} = \alpha_{k-1}^{j,\omega} | \mathbf{Y}_0^k)$. Вероятности $P(\alpha^{j,\omega} = \alpha_{k-1}^{j,\omega} | \mathbf{Y}_0^k)$ являются канальными весами, т.е. определяют вес каждого канала в формировании общей оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$.

Примем уравнения (7) для решения поставленной задачи фильтрации частоты в условиях меняющихся ОСШ и динамики изменения частоты.

Алгоритм фильтрации в одном канале

Условную оптимальную оценку $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^{j,\omega})$ вектора \mathbf{x}_k при фиксированном значении $\alpha^{j,\omega}$ получим с учетом усреднения одношаговой функции правдоподобия по неинформативному параметру φ_k :

$$\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^{j,\omega}) = \int_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{x}_k, \quad (8)$$

где $p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^k)$ ПВ экстраполированного значения вектора \mathbf{x}_k при фиксированном значении $\alpha^{j,\omega}$.

Данную ПВ можно представить как:

$$p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^k) = C \tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega}) p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}), \quad (9)$$

где C нормировочная константа; $\tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega})$ усредненная по неинформативному параметру φ_k одношаговая функция правдоподобия (ФП).

Представленное в [Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь. 1983.] уравнение ЧэпменаКолмогорова для ПВ $p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1})$ имеет следующий вид:

$$p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \alpha^{j,\omega}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (10)$$

где, $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \alpha^{j,\omega})$ ПВ перехода марковского процесса \mathbf{x} при фиксированном значении $\alpha^{j,\omega}$.

Учитывая то, что фаза φ случайный неинформативный параметр, равномерно распределенный на интервале $[-\pi, \pi]$, одношаговую ФП $\tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega})$, усредненную по неинформативному параметру φ_k , можно представить через одношаговую ФП при фиксированном значении φ_k как:

$$\tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} p(\mathbf{y}_k, \varphi_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega}) d\varphi_k = \quad (11)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \varphi_k, \alpha^{j,\omega}) p_{ap}(\varphi_k) d\varphi_k,$$

где, $p_{ap}(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi}$ априорная ПВ неинформативного параметра φ_k .

В результате усреднения по фазе (11) получим функцию правдоподобия $\tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega})$, вида [Перов. А.И. Статистическая теория радиотехнических систем, с 608]

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega}) = & \exp\left\{-\frac{A_k(q_k, \alpha^{j,\omega})^2 N}{4\sigma_n^2}\right\} \times \\ & \times I_0\left(\frac{A_k(q_k, \alpha^{j,\omega})}{\sigma_n^2} X_k(\omega_k(\alpha^{j,\omega}))\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$X_k(\omega_k(\alpha^{j,\omega})) = \sqrt{I_k^2 + Q_k^2};$$

$$I_k = \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} h_{ок}(t_{k,i} - \tau_k) \cos\{2\pi f_{пч} t_{k,i} + \omega_k(\alpha^{j,\omega}) i T_d\};$$

$$Q_k = \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} h_{ок}(t_{k,i} - \tau_k) \sin\{2\pi f_{пч} t_{k,i} + \omega_k(\alpha^{j,\omega}) i T_d\}.$$

На основе выражений (2) и (4) запишем уравнение для эволюции вектора состояния (6) в каждом канальном фильтре:

$$\mathbf{x}_k(\alpha^{j,\omega}) = \mathbf{x}_{k-1}(\alpha^{j,\omega}) + \xi_{k-1}(\alpha^{j,\omega}), \quad (13)$$

где $\xi_{k-1}(\alpha^{j,\omega})$ векторный ДБГШ с нулевым МО и матрицей дисперсий $\mathbf{D}_\xi(\alpha^{j,\omega})$:

$$\mathbf{D}_\xi(\alpha^{j,\omega}) = \begin{vmatrix} \sigma_\zeta^2 T^2 & 0 \\ 0 & (2\pi f_0 \alpha_{k-1}^\omega)^2 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) получим выражение для ПВ перехода $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \alpha^{j,\omega})$:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \alpha^{j,\omega}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det[\mathbf{D}_\xi(\alpha^{j,\omega})]}} \times \quad (15)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{D}_\xi^{-1} (\alpha^{j,\omega}) (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) \right\},$$

Алгоритм фильтрации в j -ом канале должен, так или иначе, решать рекуррентные уравнения (8)-(10) для АПВ $p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^k)$. В связи с нелинейностью поставленной задачи данные рекуррентные уравнения не имеют решения в общем случае. Наиболее распространенным подходом в этом случае является гауссовская аппроксимация АПВ $p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^k)$ и следующее из нее решение в виде расширенного фильтра Калмана. Однако, применительно к решаемой задаче, гауссовская аппроксимация АПВ приводит к существенным потерям чувствительности слежения за частотой сигнала по сравнению с прямым численным решением рекуррентных уравнений (8)-(10).

Прямое численное решение рекуррентных уравнений (8)-(10) вычисляется для заданной области значений \mathbf{x}_k , т.е. для области значений, размерностью $R \times L$, где R размерность области значений по ОСШ $\overline{q_{k,1}, q_{k,R}}$ и L размерность области значений по частоте $\overline{\omega_{k,1}, \omega_{k,L}}$. Для снижения вычислительных затрат, используется следующий подход: оценки отношения ОСШ q_k формируются в виде расширенного фильтра Калмана, а оценки частоты ω_k в виде прямого решения рекуррентного уравнения для АПВ. В этом случае, прямое численное решение рекуррентных уравнений (8)-(10) вычисляется для области значений, размерностью L .

Учитывая описание наблюдений вида (1), динамики отношения с/ш в виде (2) и то, что неинформативный параметр φ_k является постоянным и равномерно распределенным на интервале $[-\pi, \pi]$, запишем алгоритм для формирования условной оценки отношения ОСШ q_k , в виде расширенного фильтра Калмана

Этап экстраполяции:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_k(\alpha^{j,\omega}) &= \hat{q}_{k-1}(\alpha^{j,\omega}), \\ \tilde{D}_{q,k}(\alpha^{j,\omega}) &= \hat{D}_{q,k-1}(\alpha^{j,\omega}) + \sigma_\zeta^2 T^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Этап коррекции:

$$\hat{q}_k(\alpha^{j,\omega}) = \tilde{q}_k(\alpha^{j,\omega}) + \hat{D}_{q,k}(\alpha^{j,\omega}) u_{q,k}(\alpha^{j,\omega}),$$

$$\hat{D}_{q,k}^{-1}(\alpha^{j,\omega}) = \tilde{D}_{q,k}^{-1} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \ln \left\{ \tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, (\alpha^{j,\omega})) \right\}}{\partial q} \right) \Bigg|_{q_k = \tilde{q}_k}. \quad (17)$$

В выражении (17), $u_{q,k}(\alpha^{j,\omega})$ это дискриминатор по ОСШ. В результате вывод получено следующее выражение

$$u_{q,k}(\alpha^{j,\omega}) =$$

$$= \ln(10^{0.1}) \left(-10^{0.1\tilde{q}_k(\alpha^{j,\omega})} T_d N + \frac{\tilde{A}_k(\tilde{q}_k, \alpha^{j,\omega})}{2\sigma_n^2} X_k(\omega_k(\alpha^{j,\omega})) \right). \quad (18)$$

Выражение для $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \ln \left\{ \tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, (\alpha^{j,\omega})) \right\}}{\partial q} \right) \Bigg|_{q_k = \tilde{q}_k}$

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \ln \left\{ \tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, (\alpha^{j,\omega})) \right\}}{\partial q} \right) \Bigg|_{q_k = \tilde{q}_k} =$$

$$= \ln(10^{0.1})^2 \left(-10^{0.1\tilde{q}_k(\alpha^{j,\omega})} T_d N + \frac{\tilde{A}_k(\tilde{q}_k, \alpha^{j,\omega})}{4\sigma_n^2} X_k(\tilde{\omega}_k(\alpha^{j,\omega})) \right). \quad (19)$$

Приведенные далее результаты моделирования получены именно в ходе численного решения рекуррентных уравнений (8)-(10) с использованием выражений (12) и (15). Численное решение рекуррентных уравнений (8)-(10) выполнялось для области значений по частоте размерностью L ($\overline{\omega_{k,1}, \omega_{k,L}}$) и значения по ОСШ $\tilde{q}_k(\alpha^{j,\omega})$.

Расчет канальных весов

Как говорилось ранее, канальными весами являются вероятности $P(\alpha^{j,\omega} = \alpha_{k-1}^{j,\omega} | \mathbf{Y}_0^k)$, посредством которых усредняются оценки из разных каналов (7)

. Алгоритм расчета АРВ $P(\alpha^{j,\omega} = \alpha_{k-1}^{j,\omega} | \mathbf{Y}_0^k)$ включает в себя ПВ $\tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^{j,\omega})$ усредненную по фазе. Проведем расчет ПВ $\tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^{j,\omega})$.

Рассмотрим следующую ПВ:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \varphi_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(\mathbf{y}_k, \varphi_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega}) p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}). \quad (20)$$

Проинтегрируем обе части равенства (20) по φ_k :

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) &= \int_{-\pi}^{\pi} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \varphi_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\varphi_k = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \varphi_k, \alpha^{j,\omega}) p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) p_{ap}(\varphi_k) d\varphi_k = \\ &= \tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega}) p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}). \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь проинтегрируем (21) по \mathbf{x}_k

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_k &= \tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^{j,\omega}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega}) p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_k, \end{aligned} \quad (22)$$

где $p(\mathbf{x}_k | \alpha^{j,\omega}, \mathbf{Y}_0^{k-1})$ ПВ значения \mathbf{x}_k при условии наличия наблюдений \mathbf{Y}_0^{k-1} , которая вычисляется в соответствующем канальном фильтре при решении рекуррентных уравнений (8)-(10).

Одношаговую ФП $\tilde{p}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \alpha^{j,\omega})$ в (22) можно напрямую найти в соответствии с (12) для заданной области значений \mathbf{x}_k . Интеграл в (22) по \mathbf{x}_k вычисляется численно для фактической области значений компонентов вектора \mathbf{x}_k .

Алгоритм самоподстраиваемой многоканальной системы слежения за частотой сигнала

Выражения (8)-(15), (22) полностью определяют алгоритм самоподстраиваемой многоканальной системы слежения за частотой сигнала (СМССЧ), схема которой представлена на 1.

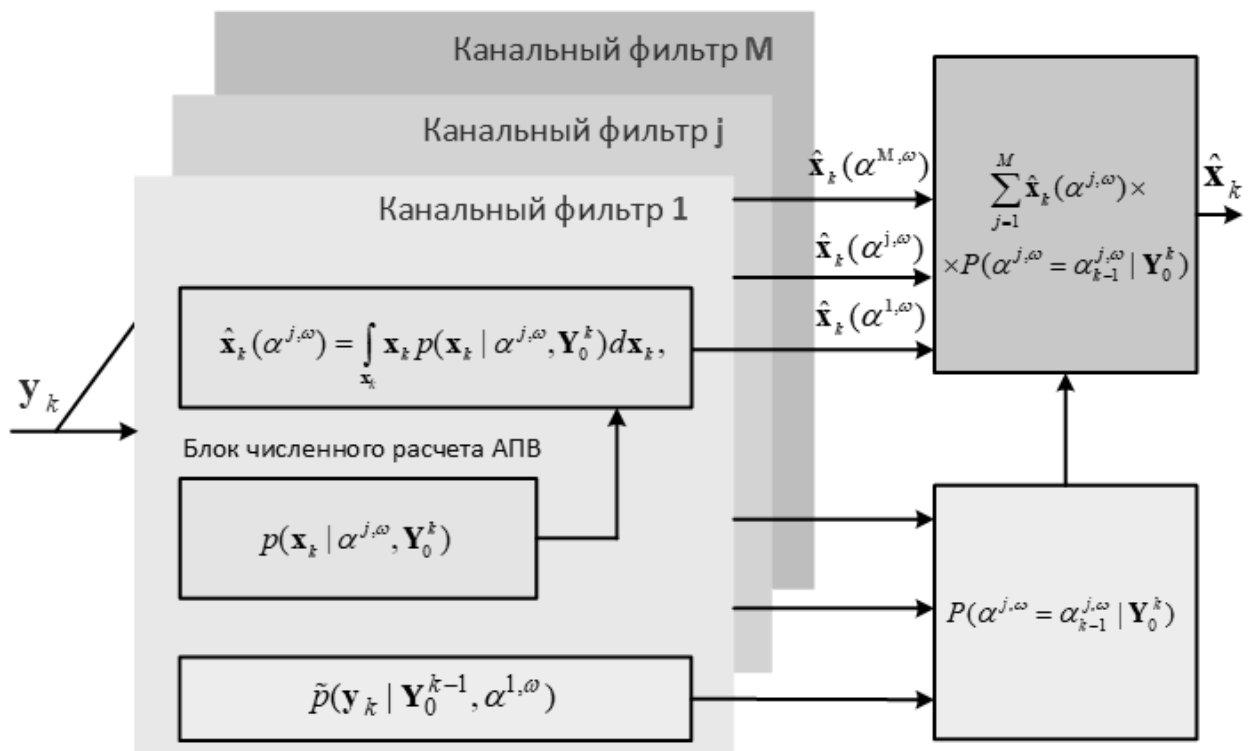


Рисунок 1. Схема СМССЧ