Занятие 8.
Оценка параметров сигнала
Оценка частоты радиоимпульса

Применим метод максимального правдоподобия.
Уравнение правдоподобия:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S(t,\omega)\,d\tau - \cancel{\frac{E}{N_0}}\right)\right|_{\omega=\hat{\omega}} = 0 \qquad \boxed{\int_0^T t y(t) f(t-\tau_з)\sin(\hat{\omega}t+\varphi_0)\,dt = 0}$$

(аналитически не решается)

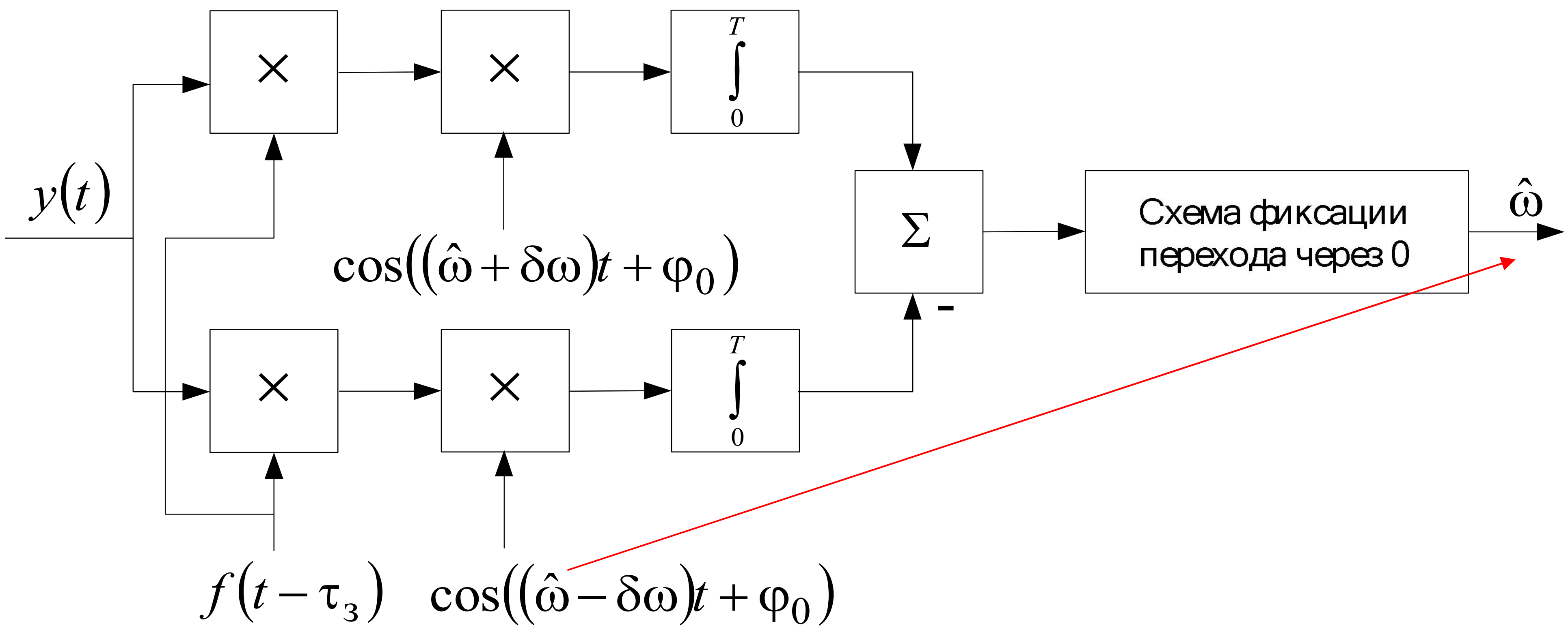
$$\int_0^T y(t) f(t-\tau_з)\frac{\partial\cos(\hat{\omega}t+\varphi_0)}{\partial\omega}\,dt \approx$$

$$\approx \int_0^T y(t) f(t-\tau_з)\frac{\cos((\hat{\omega}+\delta\omega)t+\varphi_0)-\cos((\hat{\omega}+\delta\omega)t+\varphi_0)}{2\delta\omega}\,dt = 0$$

$\delta\omega$ - расстройка по частоте

Оценка частоты радиоимпульса

Схема поиска и оценки частоты радиосигнала



Оценка параметров сигнала с помощью дискриминаторов

<u>Основная идея:</u> будем решать уравнение правдоподобия численно – методом Ньютона

Итеративный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений вида $h(\lambda)=0$:

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} - h\left(\lambda^{(i)}\right)\left[\frac{\partial h\left(\lambda^{(i)}\right)}{\partial \lambda}\right]^{-1}$$

В нашем случае: $h(\lambda) = \boxed{\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \lambda}} = 0$

Оценка параметров сигнала с помощью дискриминаторов

После подстановки $h(\lambda) = \dfrac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \lambda}$

получим:

$$\boxed{\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} - \frac{\partial \ln\left[\rho\left(\lambda^{(i)}\right)\right]}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial^2 \ln\left(\rho\left(\lambda^{(i)}\right)\right)}{\partial \lambda^2}\right]^{-1}}$$

При малых отклонениях $\left(\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}\right)$ метод сходится за одну итерацию. Тогда

$\lambda^{(i+1)} \equiv \hat{\lambda}_{\text{м}}$ – оценка максимального правдоподобия;

$\lambda^{(i)} \equiv \lambda_{\text{оп}}$ – опорное значение параметра;

Алгоритм оценивания с помощью дискриминатора

$$\boxed{\hat{\lambda}_{\text{м}} = \lambda_{\text{оп}} + u_{\text{д,н}}\left(\lambda_{\text{оп}}\right)}$$

$$u_{\text{д,н}}\left(\lambda_{\text{оп}}\right) = -\frac{\partial \ln\left(\rho\left(\lambda_{\text{оп}}\right)\right)}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial^2 \ln\left(\rho\left(\lambda_{\text{оп}}\right)\right)}{\partial \lambda^2}\right]^{-1}$$

- выходной сигнал дискриминатора с нормированной крутизной ДХ.

Сам дискриминатор:

$$u_{\text{д}} = \frac{\partial \ln\left(\rho\left(\lambda_{\text{оп}}\right)\right)}{\partial \lambda}$$

Крутизна ДХ:

$$S_{\text{д}}\left(\lambda_{\text{оп}}\right) = -M\left[\frac{\partial^2 \ln\left(\rho\left(\lambda_{\text{оп}}\right)\right)}{\partial \lambda^2}\right]$$

Потенциальная точность оценок параметров сигнала

…Под потенциальной точностью оценок параметров радиосигнала понимают нижнюю границу Рао-Крамера для дисперсии ошибки оценки максимального правдоподобия. Потенциальная точность характеризует тот предел точности оценивания, который может быть достигнут только в результате обработки наблюдаемой реализации ***Y*** , т.е. без учета априорной информации.

Будем рассматривать сигнал в общем виде

$$S(t,\lambda) = Af(t-\tau_з)\cos(\omega t + \varphi_0), \quad t \in [0,T]$$

$f(t)$- огибающая, $\tau_з$ - время запаздывания

Логарифм отношения правдоподобия:

$$\ln(\rho(\boldsymbol{\lambda})) = \frac{2}{N_0}\int_0^T \left\{ y(t)Af(t-\tau_з)\cos(\omega t+\varphi_0) - 0{,}5A^2f^2(t-\tau_з)\cos^2(\omega t+\varphi_0)\right\}dt$$

Потенциальная точность оценки задержки по огибающей

Вспоминаем: $$D_{\text{ош}\,\tau_з} = \frac{-1}{M\left\{\partial^2 \ln\left(\rho\left(\tau_з\right)\right) / \partial\tau_з^2\right\}}$$ - ?

Полагаем, что $\frac{\partial}{\partial\tau_з}\int\limits_0^T f^2\left(t-\tau_з\right)\cos^2\left(\omega t+\varphi_0\right)dt = 0,$ тогда

$$M\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau_з^2}\ln\rho\left(\tau_з\right)\right] = \frac{2A}{N_0}M\left[\int\limits_0^T y(t)\frac{\partial^2 f\left(t-\tau_з\right)}{\partial\tau_з^2}\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)dt\right] =$$

$$= \frac{2A^2}{N_0}\int\limits_0^T \tilde{f}\left(t-\tau_з\right)\frac{\partial^2 \tilde{f}\left(t-\tau_з\right)}{\partial\tau_з^2}dt, \text{ где } \tilde{f}\left(t-\tau_з\right) = f\left(t-\tau_з\right)\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau_з}\int\limits_0^T \tilde{f}^2\left(t-\tau_з\right)dt = 2\int\limits_0^T \tilde{f}\left(t-\tau_з\right)\frac{\partial\tilde{f}\left(t-\tau_з\right)}{\partial\tau_з}dt = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau_з^2}\int\limits_0^T \tilde{f}^2\left(t-\tau_з\right)dt = \int\limits_0^T \frac{\partial\tilde{f}\left(t-\tau_з\right)}{\partial\tau_з}\frac{\partial\tilde{f}\left(t-\tau_з\right)}{\partial\tau_з}dt + \int\limits_0^T \tilde{f}\left(t-\tau_з\right)\frac{\partial^2 \tilde{f}\left(t-\tau_з\right)}{\partial\tau_з^2}dt = 0$$

Продолжение вывода

$$\int_0^T \frac{\partial \tilde{f}(t-\tau_з)}{\partial \tau_з} \frac{\partial \tilde{f}(t-\tau_з)}{\partial \tau_з} dt + \int_0^T \tilde{f}(t-\tau_з) \frac{\partial^2 \tilde{f}(t-\tau_з)}{\partial \tau_з^2} dt = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T \tilde{f}(t-\tau_з) \frac{\partial^2 \tilde{f}(t-\tau_з)}{\partial \tau_з^2} dt = -\int_0^T \frac{\partial \tilde{f}(t-\tau_з)}{\partial \tau_з} \frac{\partial \tilde{f}(t-\tau_з)}{\partial \tau_з} dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau_з^2} \ln \rho(\tau_з)\right] = -\frac{2A^2}{N_0} \int_0^T \left(\frac{\partial \tilde{f}(t-\tau_з)}{\partial \tau_з}\right)^2 dt = -\frac{2}{N_0} \int_0^T \left(\frac{\partial S(t-\tau_з)}{\partial \tau_з}\right)^2 dt$$

Введём

$$\beta^2 = \frac{1}{E} \int_0^T \left[\frac{\partial S(t-\tau_з)}{\partial \tau_з}\right]^2 dt, \quad \text{где} \quad E = \int_0^T S^2(t-\tau_з)\, dt \text{ - энергия сигнала}$$

Тогда

$$\boxed{D_{\text{ош}\,\tau_з} = \frac{-1}{M\left\{\partial^2 \ln(\rho(\tau_з)) / \partial \tau_з^2\right\}} = \frac{N_0}{2E\beta^2} = \frac{1}{2q\beta^2}}$$

Физический смысл параметра β

$$D_{\text{ош }\tau_з} = \frac{1}{2q\beta^2}$$ - формула Вудворда

$$q = \frac{E}{N_0} -$$ с/ш

Можно показать, что $$\beta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega$$

$S(j\omega) -$ комплексный спектр огибающей сигнала

То есть β – это эффективная ширина спектра сигнала

Вывод: потенциальная точность оценки задержки сигнала определяется отношением с/ш и эффективной шириной спектра сигнала

Потенциальная точность оценки частоты сигнала

Вспоминаем: $$D_{\text{ош}\,f} = \frac{-1}{M\left\{\partial^2 \ln\left(\rho\left(f\right)\right) / \partial f^2\right\}}$$ - ?

Полагаем, что $\frac{\partial}{\partial f}\int\limits_0^T f^2\left(t-\tau_\text{з}\right)\cos^2\left(2\pi f t+\varphi_0\right)dt = 0,$ тогда

$$M\left[\frac{\partial^2}{\partial f^2}\ln\rho\left(f\right)\right] = \frac{2A}{N_0}M\left[\int\limits_0^T y\left(t\right)f\left(t-\tau_\text{з}\right)\frac{\partial^2\cos\left(2\pi f t+\varphi_0\right)}{\partial f^2}dt\right] = -\frac{2}{N_0}\int\limits_0^T\left(2\pi t\right)^2 S^2\left(t,\tau_\text{з}\right)dt$$

$$\alpha = \left(\int\limits_0^T\left(2\pi t\right)^2 S^2\left(t\right)dt \bigg/ \int\limits_0^T S^2\left(t\right)dt\right)^{1/2}$$ - **среднеквадратическая длительность сигнала**

$$\boxed{D_{\text{ош}\,\hat{f}} = \frac{N_0}{2E\alpha^2} = \frac{1}{2q\alpha^2}}$$

Вывод: потенциальная точность оценки частоты сигнала определяется отношением с/ш и среднеквадратической длительностью сигнала

Потенциальная точность совместной оценки частоты и задержки сигнала

Вектор информативных параметров: $\boldsymbol{\lambda} = \begin{vmatrix} \tau_з \\ f \end{vmatrix}$

$$\mathbf{D}_\lambda = M\left[\left(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}\right)^{\mathrm{T}}\right] = \begin{vmatrix} D_{\text{ош}\,\hat{\tau}_з} & D_{\text{ош}\,\hat{\tau}_з \hat{f}} \\ D_{\text{ош}\,\hat{\tau}_з \hat{f}} & D_{\text{ош}\,\hat{f}} \end{vmatrix} = \mathbf{J}^{-1} = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix}^{-1}$$

$$\boxed{J_{ij} = M\left\{\frac{\partial \ln\left(p\left(Y_0^T | \lambda\right)\right)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ln\left(p\left(Y_0^T | \lambda\right)\right)}{\partial \lambda_j}\right\} = -M\left[\frac{\partial^2 \ln\left(\rho\left(\boldsymbol{\lambda}\right)\right)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}\right]}$$

- элементы матрицы Фишера

Ранее мы нашли:

$$J_{11} = -M\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau_з^2} \ln \rho\left(\tau_з, f\right)\right] = 2q\beta^2$$

$$J_{22} = -M\left[\frac{\partial^2}{\partial f^2} \ln \rho\left(\tau_з, f\right)\right] = 2q\alpha^2$$

Потенциальная точность совместной оценки частоты и задержки сигнала

Найдём внедиагональные элементы матрицы Фишера:

$$J_{12} = J_{21} = -M\left\{\frac{\partial^2 \ln\rho\left(f,\tau_з\right)}{\partial f\,\partial\tau_з}\right\} = \frac{2}{N_0}\int_0^T 2\pi t S\left(t-\tau_з\right)\frac{\partial f\left(t-\tau_з\right)}{\partial\tau_з}\sin\left(2\pi f t+\varphi_0\right)dt$$

Обозначим: $\overline{ft} = \left(\int_0^T 2\pi t S\left(t-\tau_з\right)\frac{\partial f\left(t-\tau_з\right)}{\partial\tau_з}\sin\left(2\pi f t+\varphi_0\right)dt \Big/ \int_0^T S^2\left(t-\tau_з\right)dt\right)$

Тогда: $\boxed{J_{12} = J_{21} = 2q\,\overline{ft}}$

Определитель матрицы Фишера для обращения матрицы:

$$\det\left(\mathbf{J}\right) = J_{11}J_{22} - J_{12}^2 = 4q^2\alpha^2\beta^2 - 4q^2\left(\overline{ft}\right)^2 = 4q^2\left(\alpha^2\beta^2 - \left(\overline{ft}\right)^2\right)$$

Потенциальная точность совместной оценки частоты и задержки сигнала

Элементы корреляционной матрицы ошибок:

$$D_{\text{ош}\,\hat{\tau}_з} = \frac{J_{22}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\alpha^2}{2q\left(\alpha^2\beta^2 - \left(\overline{ft}\right)^2\right)}$$

$$D_{\text{ош}\,\hat{f}} = \frac{J_{11}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\beta^2}{2q\left(\alpha^2\beta^2 - \left(\overline{ft}\right)^2\right)}$$

$$D_{\text{ош}\,\hat{\tau}_з\hat{f}} = \frac{J_{12}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\overline{ft}}{2q\left(\alpha^2\beta^2 - \left(\overline{ft}\right)^2\right)}$$

$\alpha\beta$ - база сигнала

*Вывод: точность совместных оценок тем выше, чем выше отношение с/ш или чем выше **база** сигнала (произведение эффективной длительности на эффективную ширину спектра)*

Письменное домашнее задание

1. Найти потенциальную точность совместной оценки амплитуды и фазы сигнала (остальные параметры считаются известными)

Результат – корреляционная матрица ошибок (2x2) оценивания амплитуды и фазы.

2. Найти потенциальную точность оценки амплитуды сигнала при неизвестной начальной фазе сигнала (остальные параметры считаются известными)

Результат – дисперсия ошибки оценивания амплитуды.

$$y(t) = \boxed{A} f(t - \tau_з)\cos(\omega t + \boxed{\varphi_0}) + n(t), \quad t \in [0, T]$$

$f(t)$ - огибающая, $\tau_з$ - время запаздывания, $n(t)$ - БГШ.