Занятие 10. Оптимальная линейная фильтрация. Постановка задачи.

Наблюдение (скалярное): $\boxed{y_k = H_k \lambda_k + n_k}$

k - номер отсчета (соотв. моменту времени t_k)

n_k - дискретный белый гауссовский шум с дисперсией σ_n^2

H_k - известный коэффициент.

Модель сообщения: $\boxed{\lambda_k = F_{k-1} \lambda_{k-1} + G_{k-1} \xi_{k-1}}$

ξ_k - дискретный БГШ с дисперсией σ_ξ^2

F_{k-1}, G_{k-1} - известные коэффициенты, $\lambda_0 \subset \mathbb{N}\left(m_\lambda, \sigma_\lambda\right)$

Решение задачи линейной фильтрации

Для поставленной задачи уравнение Стратоновича имеет строгое решение.

$$\boxed{p\left(\lambda_k \middle| Y_0^k\right) = c p\left(y_k \middle| \lambda_k\right) \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\lambda_{k-1} \middle| Y_0^{k-1}\right) p\left(\lambda_k \middle| \lambda_{k-1}\right) d\lambda_{k-1}, \quad p\left(\lambda_0 \middle| Y_0^0\right) = \mathbb{N}\left(m_\lambda, \sigma_\lambda\right)}$$

$$p\left(y_k \middle| \lambda_k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left\{ -\frac{\left(y_k - H_k \lambda_k\right)^2}{2\sigma_n^2} \right\}$$

$$p\left(\lambda_k \middle| \lambda_{k-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_{k-1}^2 \sigma_\xi^2}} \exp\left\{ -\frac{\left(\lambda_k - F_{k-1}\lambda_{k-1}\right)^2}{2 G_{k-1}^2 \sigma_\xi^2} \right\}$$

Апостериорная ПВ $p\left(\lambda_k \middle| Y_0^k\right)$ - гауссовская!

Решение задачи линейной фильтрации

Гауссовская АПВ имеет только 2 момента (матожидание и дисперсию) и может быть полностью ими описана:

$$\hat{\lambda}_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{k-1} p\left(\lambda_{k-1} \middle| Y_0^{k-1}\right) d\lambda_{k-1}$$ - оценка

$$D_{\lambda,k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1}\right)^2 p\left(\lambda_{k-1} \middle| Y_0^{k-1}\right) d\lambda_{k-1}$$ - дисперсия ошибки

$$p\left(\lambda_{k-1} \middle| Y_0^{k-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda,k-1}}} \exp\left(-\frac{\left(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2D_{\lambda,k-1}} \right)$$

Решение задачи линейной фильтрации

Подставим выражения для всех ПВ в уравнение Стратоновича

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\left(\lambda_{k-1} \middle| Y_0^{k-1}\right) p\left(\lambda_k \middle| \lambda_{k-1}\right) d\lambda_{k-1} = p\left(\lambda_k \middle| Y_0^{k-1}\right) =$$

$$= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - F_{k-1}\lambda_{k-1}\right)^2}{2G_{k-1}^2\sigma_\xi^2}\right\} \exp\left(-\frac{\left(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2D_{\lambda,k-1}}\right) d\lambda_{k-1} =$$

$$= c_2 \exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - F_{k-1}\hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2\left(F_{k-1}^2 D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^2\sigma_\xi^2\right)}\right\}$$

Решение задачи линейной фильтрации

Подставим выражения для всех ПВ в уравнение Стратоновича

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^k\right) = c\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left\{-\frac{\left(y_k - H_k\lambda_k\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\cdot c_2\exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - F_{k-1}\hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2\left(F_{k-1}^2 D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^2\sigma_\xi^2\right)}\right\} =$$

$$= c_3\exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - F_{k-1}\hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2\left(F_{k-1}^2 D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^2\sigma_\xi^2\right)} - \frac{\left(y_k - H_k\lambda_k\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

Запишем АПВ в виде

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda,k}}}\exp\left(-\frac{\left(\lambda_k - \hat{\lambda}_k\right)^2}{2D_{\lambda,k}}\right) = c_4\exp\left\{-\frac{1}{D_{\lambda,k}}\frac{\lambda_k^2}{2} + \hat{\lambda}_k\frac{\lambda_k}{D_{\lambda,k}}\right\}$$

Решение задачи линейной фильтрации

Найдём коэффиценты a и b при λ_k и λ_k^2

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^k\right) = c_3 \exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - F_{k-1}\hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2\left(F_{k-1}^2 D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^2\sigma_\xi^2\right)} - \frac{\left(y_k - H_k\lambda_k\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\} = c_4 \exp\left\{b\lambda_k^2 + a\lambda_k\right\},$$

$$\left(a = \frac{\hat{\lambda}_k}{D_{\lambda,k}}, b = -\frac{1}{2D_{\lambda,k}} \quad \Rightarrow \quad D_{\lambda,k} = -\frac{1}{2b}, \quad \hat{\lambda}_k = -\frac{a}{2b}\right)$$

Отсюда

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\lambda}_k &= F_{k-1}\hat{\lambda}_{k-1} + H_k \frac{D_{\lambda,k}}{\sigma_n^2}\left(y_k - H_k F_{k-1}\hat{\lambda}_{k-1}\right), \\ \frac{1}{D_{\lambda,k}} &= \frac{1}{F_{k-1}^2 D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^2\sigma_\xi^2} + \frac{H_k^2}{\sigma_n^2} \end{aligned}}$$

Уравнения оптимальной линейной фильтрации

1. $\tilde{D}_{\lambda,k} = F_{k-1}^2 D_{\lambda,k-1} + G_{k-1}^2 \sigma_\xi^2$ - дисперсия ошибки экстраполированной оценки $\tilde{\lambda}_k$

2. $D_{\lambda,k}^{-1} = \tilde{D}_{\lambda,k}^{-1} + H_k^2 \sigma_n^{-2}$ - дисперсия ошибки оценки $\hat{\lambda}_k$

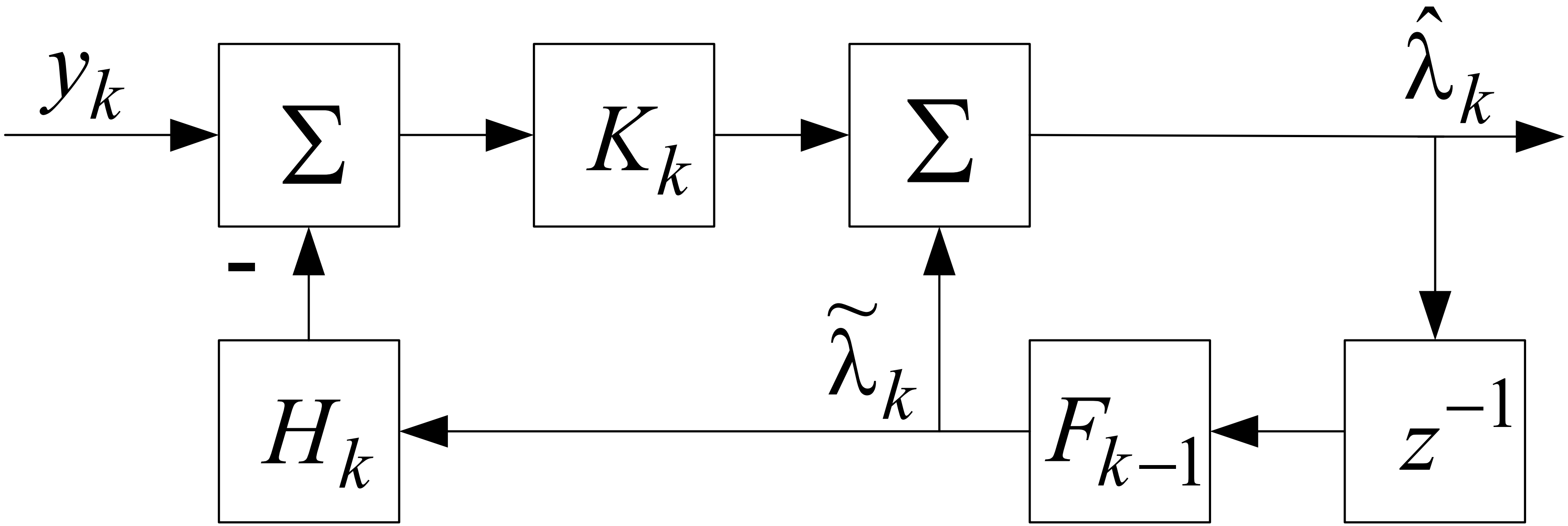
3. $K_k = H_k \dfrac{D_{\lambda,k}}{\sigma_n^2}$ - коэффициент фильтра

4. $\tilde{\lambda}_k = F_{k-1} \hat{\lambda}_{k-1}$ - экстраполированная оценка

5. $\left(y_k - H_k \tilde{\lambda}_{k-1} \right)$ - невязка измерений

6. $\hat{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k + K_k \left(y_k - H_k \tilde{\lambda}_{k-1} \right)$ - шаг оценивания

Схема оптимального линейного фильтра для дискретного времени в скалярном виде



Постановка задачи оптимальной линейной фильтрации для векторных наблюдений и процессов

$\underline{\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k,}$ k - момент времени,

$\mathbf{H}_k$ - известная матрица,

$\mathbf{n}_k$ - векторный ДБГШ с матрицей дисперсий $\mathbf{D}_n$,

$\mathbf{x}_k$ - многомерный марковский процесс:

$\underline{\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\xi_{k-1},}$ $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \subset \mathbb{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{x}0}, \mathbf{R}_{\mathbf{x}0}),$

$\mathbf{F}_{k-1}, \mathbf{G}_{k-1}$ - известные матрицы,

ξ_k – векторный ДБГШ с матрицей дисперсий $\mathbf{D}_\xi$.

Уравнения оптимальной линейной фильтрации для векторных наблюдений и процессов (фильтр Калмана)

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1},\\ \tilde{\mathbf{D}}_{\text{x},k} &= \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{D}_{\text{x},k-1}\mathbf{F}_{k-1}^{\text{т}} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{D}_{\xi}\mathbf{G}_{k-1}^{\text{т}},\end{aligned}\right|\quad \text{Шаг экстраполяции}$$

Шаг оценивания:

$$\mathbf{D}_{\text{x},k} = \left(\tilde{\mathbf{D}}_{\text{x},k}^{-1} + \mathbf{H}_{k-1}^{\text{т}}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}_{k-1}\right)^{-1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_{k-1}\right)\tilde{\mathbf{D}}_{\text{x},k}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{D}_{\text{x},k}\mathbf{H}_k^{\text{т}}\mathbf{D}_n^{-1} = \tilde{\mathbf{D}}_{\text{x},k}\mathbf{H}_k^{\text{т}}\left(\mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{D}}_{\text{x},k}\mathbf{H}_k^{\text{т}} + \mathbf{D}_n\right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{x}}_k\right)$$

Постановка задачи оптимальной линейной фильтрации в непрерывном времени

$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t)$, - наблюдения

$\mathbf{H}(t) -$ известная матричная функция времени,

$\mathbf{n}(t) -$ векторный БГШ с корр. матрицей $\mathbf{N}_{\mathrm{n}}(\tau) = \mathbf{S}_{\mathrm{n}}/2 \cdot \delta(\tau)$,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x} + \mathbf{G}(t)\boldsymbol{\xi}(t), \quad \mathbf{x}(0) \subset \mathbb{N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{D}_{\mathbf{x0}})$$

$\mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t)$ - известные матричные функции,

$\boldsymbol{\xi}(t)$ - векторный БГШ с корр. матрицей $\mathbf{R}_{\xi}(\tau) = \mathbf{S}_{\xi}/2 \cdot \delta(\tau)$

Уравнения оптимальной линейной фильтрации в непрерывном времени

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)\left(\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}\right), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{D}_{\text{x}}(t)\mathbf{H}^{\text{т}}(t)2\mathbf{N}_n^{-1}$$

$$\frac{d\mathbf{D}_{\text{x}}}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{D}_{\text{x}} + \mathbf{D}_{\text{x}}\mathbf{F}^{\text{т}}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{G}(t)\mathbf{S}_{\xi}\mathbf{G}^{\text{т}}(t) -$$

$$-\mathbf{D}_{\text{x}}\mathbf{H}^{\text{т}}(t)2\mathbf{N}_n^{-1}\mathbf{H}(t)\mathbf{D}_{\text{x}}^{\text{т}}, \qquad \mathbf{D}_{\text{x}}(0) = \mathbf{D}_{\mathbf{x0}}$$

Пример схемы линейного скалярного фильтра для непрерывного времени в виде следящей системы