Лекция 7. Основы теории фильтрации случайных процессов.

Основные отличия от задачи оценивания параметров:

1. Информативные параметры меняются со временем

$$\boxed{\lambda(t) \neq const}$$

2. Требуется дать оценку процесса не для какого-то одного, а для каждого интересующего момента времени.

$y(t_k) = S(t_k, \lambda_k(t_k)) + n(t_k)$: наблюдения на интервале $[0, t_k]$

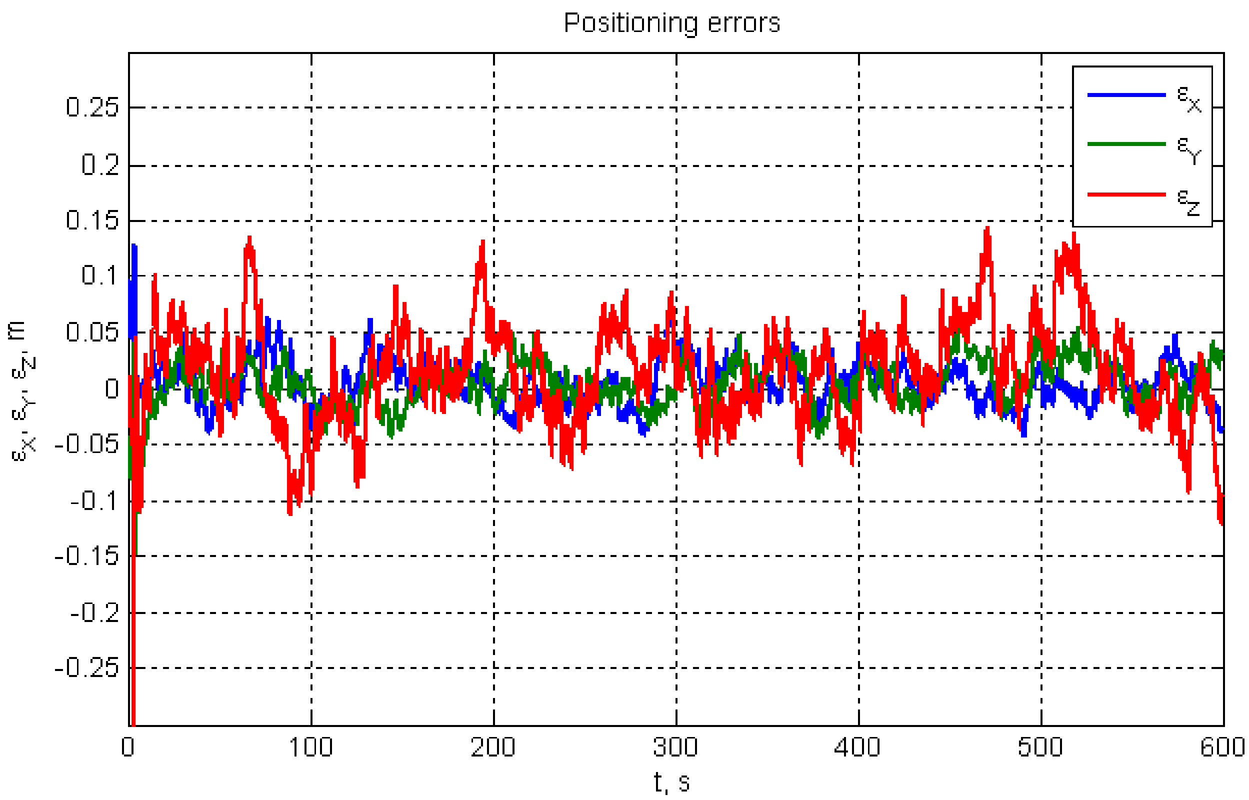
$S(t_k, \lambda(t_k))-$ сигнал, несущий информационный процесс $\lambda(t_k)$

$n(t_k)$ - БГШ с односторонней СПМ $N_0 = 2\sigma_n^2 T$

+ известна априорная информация о $\lambda(t_k)$

Случайные процессы

Пример случайного процесса (ошибка оценивания координат в зависимости от времени):



Сл. процесс описывается совокупностью ПВ:

$$p\left(x_1\left(t_1\right)\right), p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right)\right), \ldots, p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right) \ldots x_n\left(t_n\right)\right)$$

Стационарность СП

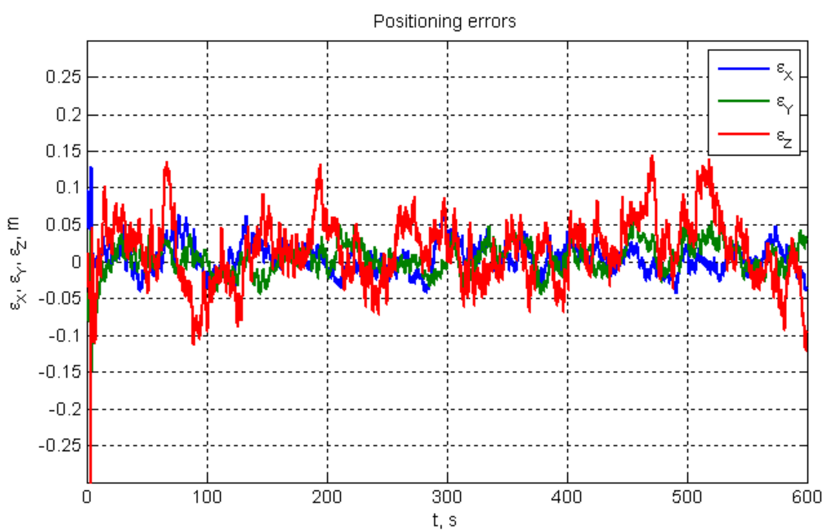
Стационарность в узком смысле

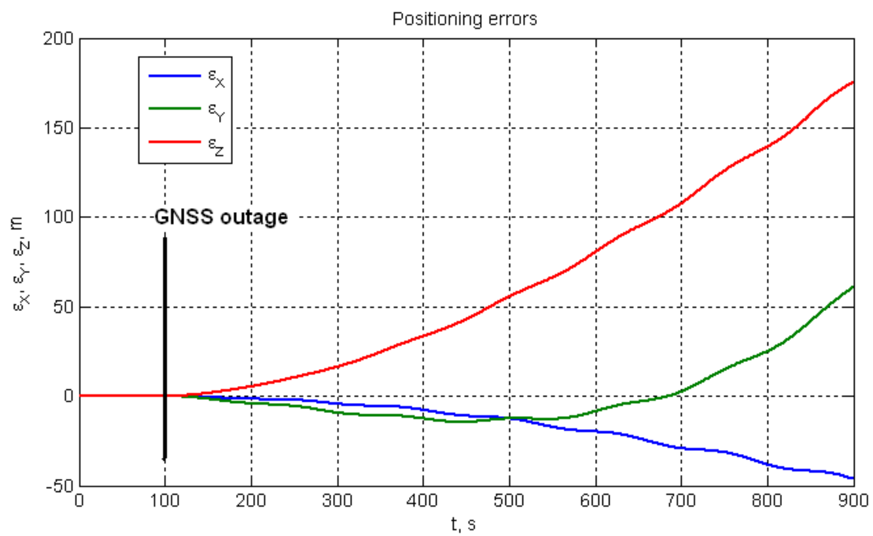
$$p\left(x\left(t_1-\tau\right),x\left(t_2-\tau\right)\ldots x\left(t_m-\tau\right)\right)=p\left(x\left(t_1\right),x\left(t_2\right)\ldots x\left(t_m\right)\right)$$

Стационарность в широком смысле

$$m_X = const, \quad D_X < \infty$$

$$R_X\left(t_1,t_2\right)=M\left[x\left(t_1\right)x\left(t_2\right)\right]=R_X\left(t_2-t_1\right)$$





Корреляционная функция и спектральная плотность СП

$$АКФ: \quad R_X(\tau) = M\left[x(t)x(t-\tau)\right]$$

$$ВКФ: \quad R_{XY}(\tau) = M\left[x(t)y(t-\tau)\right]$$

$$СПМ: \quad S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Гауссовские случайные процессы

Гауссовская случайная последовательность

$$\mathbf{x} = \left| x_1(t_1), x_2(t_2) \ldots x_n(t_n) \right|$$

Описывается гауссовской совместной плотностью вероятности

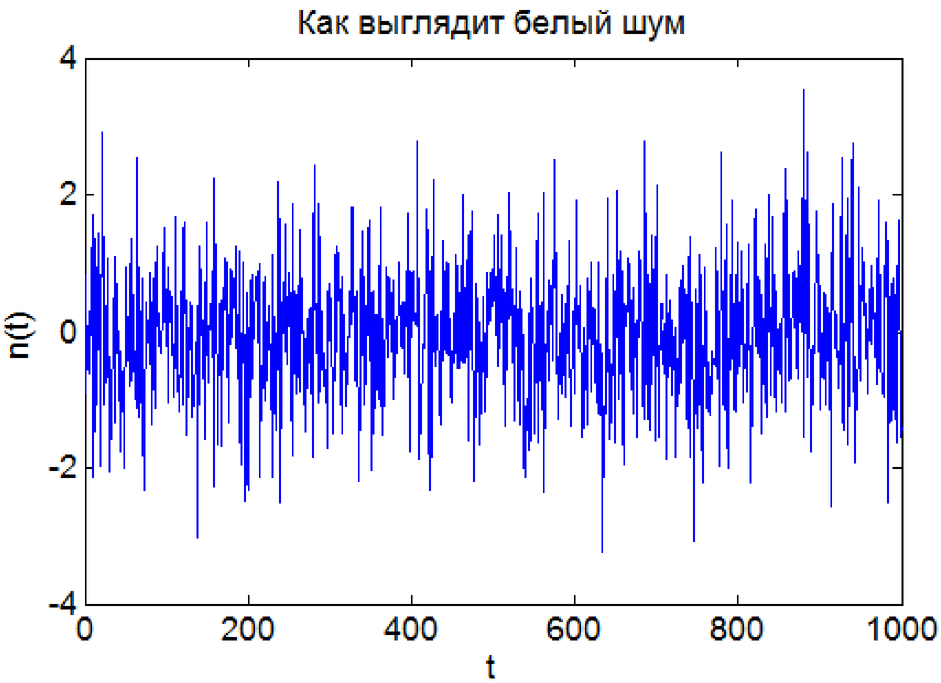
$$p(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - M[\mathbf{X}]\right)^T \mathbf{R}_X^{-1} \left(\mathbf{x} - M[\mathbf{X}]\right) \right\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\mathbf{R}_X)}}$$

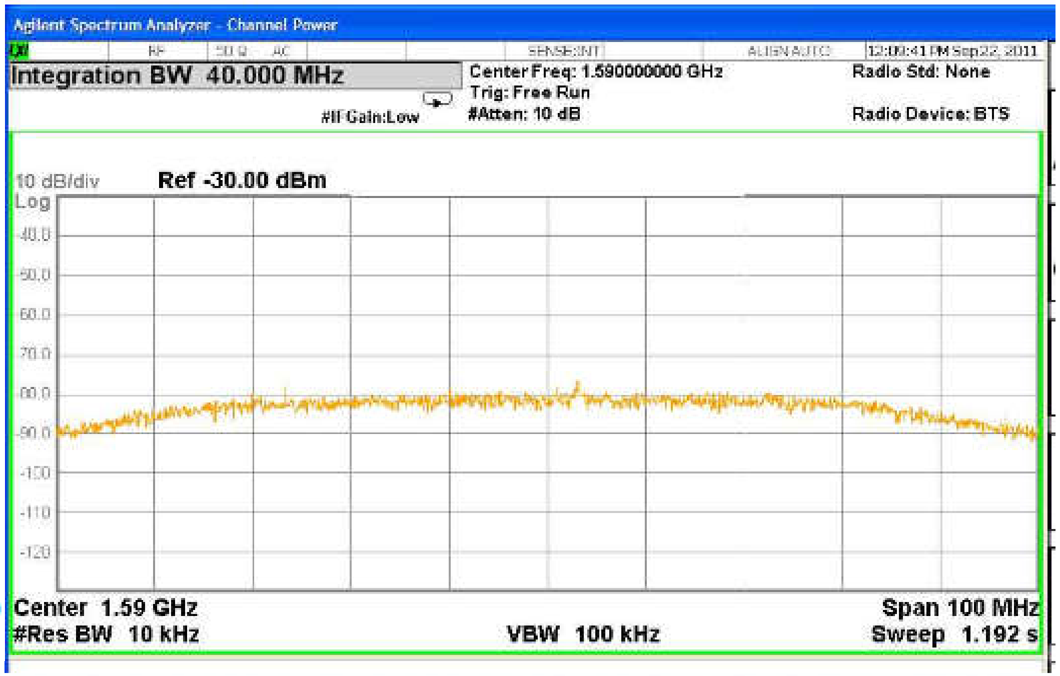
Белый гауссовский шум

$$n(t) \to R(\tau) = M\left[n(t)n(t+\tau)\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Дискретный белый гауссовский шум (ДБГШ)

$$n_i \to \mathbb{N}(0,\sigma_n) \qquad R_{i,j} = M\left[n_i n_j\right] = \sigma_n^2 \delta_{i,j} \qquad \text{если} \quad n_i = \frac{1}{T}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} n(t)\,\mathrm{d}t, \ \text{то} \quad \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2T}$$





Марковские случайные процессы

Совместная ПВ для конечной точки процесса:

$$p\left(x_1(t_1),x_2(t_2)\ldots x_n(t_n)\right)=p\left(x_n(t_n)\,|\,x_1(t_1),x_2(t_2)\ldots x_{n-1}(t_{n-1})\right)p\left(x_1(t_1),x_2(t_2)\ldots x_{n-1}(t_{n-1})\right)$$

Для марковского случайного процесса будущее не зависит от прошлого, а зависит только от настоящего, т.е.

$$p\left(x_n(t_n)\,|\,x_1(t_1),x_2(t_2)\ldots x_{n-1}(t_{n-1})\right)=p\left(x_n(t_n)\,|\,x_{n-1}(t_{n-1})\right)$$

$p\left(x_n(t_n)\,|\,x_{n-1}(t_{n-1})\right)$ **- это плотность вероятности перехода**

Стохастическое уравнение диффузионного МП:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)+\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\xi(t),\quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$ - для непрерывного времени

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1},k-1)+\mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1},k-1)\xi_{k-1}$$ - для дискретного времени

Гауссовские марковские процессы

Описываются линейными стохастическими уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{F}(t)\mathbf{x}+\mathbf{g}(t)\xi(t),\quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$ - для непрерывного времени

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{G}_{k-1}\xi_{k-1}$$ - для дискретного времени

$p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1})$ - гауссовская, то есть:

$$p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1})=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_k-\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}\right)^T\mathbf{R}_X^{-1}\left(\mathbf{x}_k-\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}\right)\right\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\mathbf{R}_X)}}$$

$$\mathbf{R}_X=M\left[\left(\mathbf{G}_{k-1}\xi_{k-1}\right)\left(\mathbf{G}_{k-1}\xi_{k-1}\right)^T\right]=\mathbf{G}_{k-1}\mathbf{D}_\xi\mathbf{G}_{k-1}^T$$

Винеровский процесс

$$w(t)=\int_0^t n(\tau)\,d\tau \qquad D_w(t)=M\left[w^2(t)\right]=\frac{N_0}{2}t$$

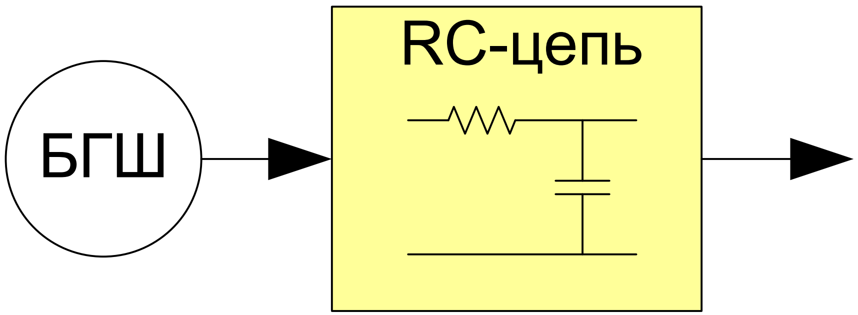
Винеровский процесс в дискретном времени

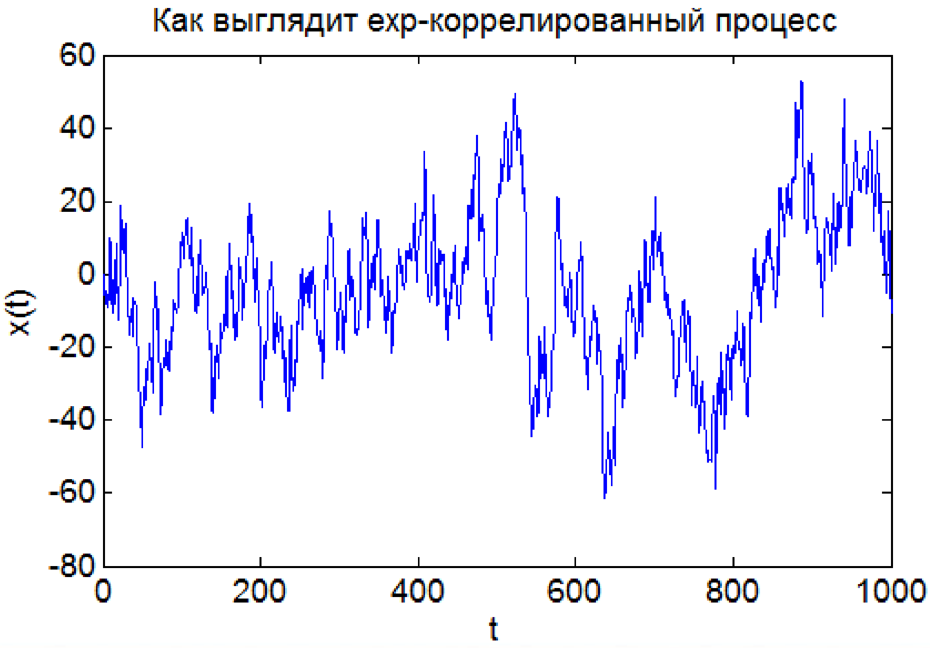
$$w_k=w_{k-1}+n_kT, \qquad n_k\to\mathbb{N}(0,\sigma_n),\ \sigma_n^2=\frac{N_0}{2T}$$

Экспонециально коррелированный процесс

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\alpha x(t) + \sqrt{2\alpha\sigma^2}\,n(t); \qquad R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau)$$

$$x_k = \exp(-\alpha T)\,x_{k-1} + \sigma\sqrt{1 - \exp(-2\alpha T)}\,n_{k-1}$$





Постановка задачи фильтрации, интерполяции, экстраполяции

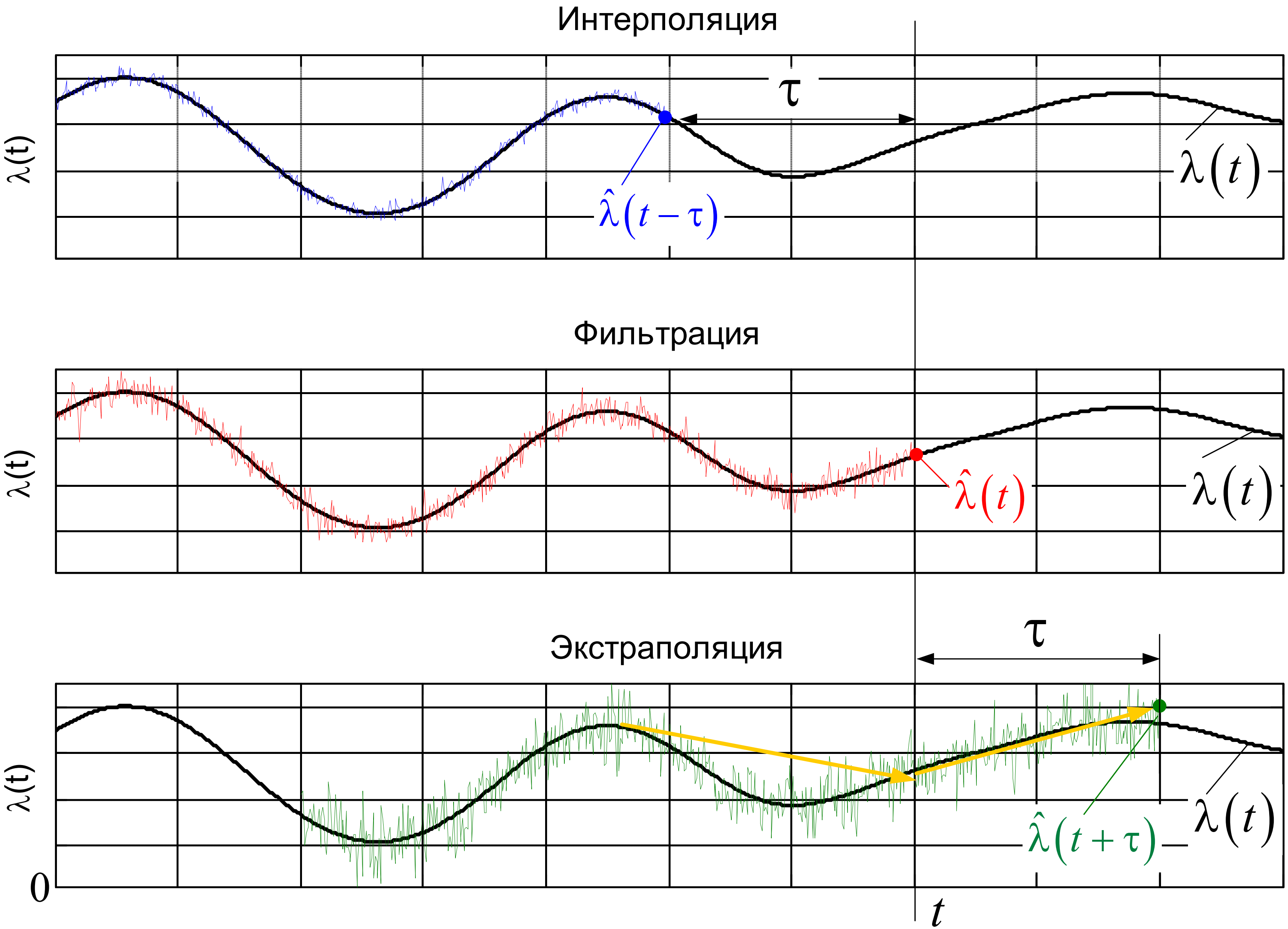
Задача фильтрации: используя наблюдения *y(t)* и апр. инф. требуется сформировать оценку $\hat{\lambda}(t)$ для текущего момента времени *t*.

Задача интерполяции: требуется сформировать оценку $\hat{\lambda}(t-\tau)$ для момента времени в прошлом.

Задача экстраполяции: требуется предсказать оценку $\hat{\lambda}(t+\tau)$ для момента времени в будущем.

Критерий – минимальная дисперсия ошибки.

Фильтрация, экстраполяция, интерполяция



Априорная информация о процессе $\lambda_k(t_k)$

В теории оптимальной фильтрации сообщение $\lambda_k(t_k)$ представляют как часть многомерного марковского процесса:

$$\lambda_k(t_k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t_k), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad k - \text{момент времени}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1})\boldsymbol{\xi}_{k-1}$$

$\boldsymbol{\xi}_k - m$-мерный вектор БГШ с корреляционной матрицей $\mathbf{R}_\xi$

В каждый момент времени $\mathbf{x}_k$ является векторной с.в. и описывается априорной ПВ $p(\mathbf{x}_k, t_k)$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Из теории статистических решений оценка **x** формируется на основе АПВ **x**:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{x} p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_0^k\right) d\mathbf{x} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{x}}_k = \arg\max p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_0^k\right)$$

Поэтому надо искать апостериорную плотность вероятности (АПВ) **x** на текущий момент времени *k*: $p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_0^k\right)$

Рассмотрим совместную условную ПВ $p\left(\mathbf{x}_k, y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$

$$p\left(\mathbf{x}_k, y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) p\left(y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) p\left(y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$$

$\mathbf{Y}_0^k = y_0, y_1 \dots y_k$ - выборка

$p\left(y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k\right) = 1/c$ - не зависит от **x**;

$p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right)$ – одношаговая функция правдоподобия;

отсюда:

$$\boxed{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = cp\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)}$$

При белом гауссовском шуме наблюдений

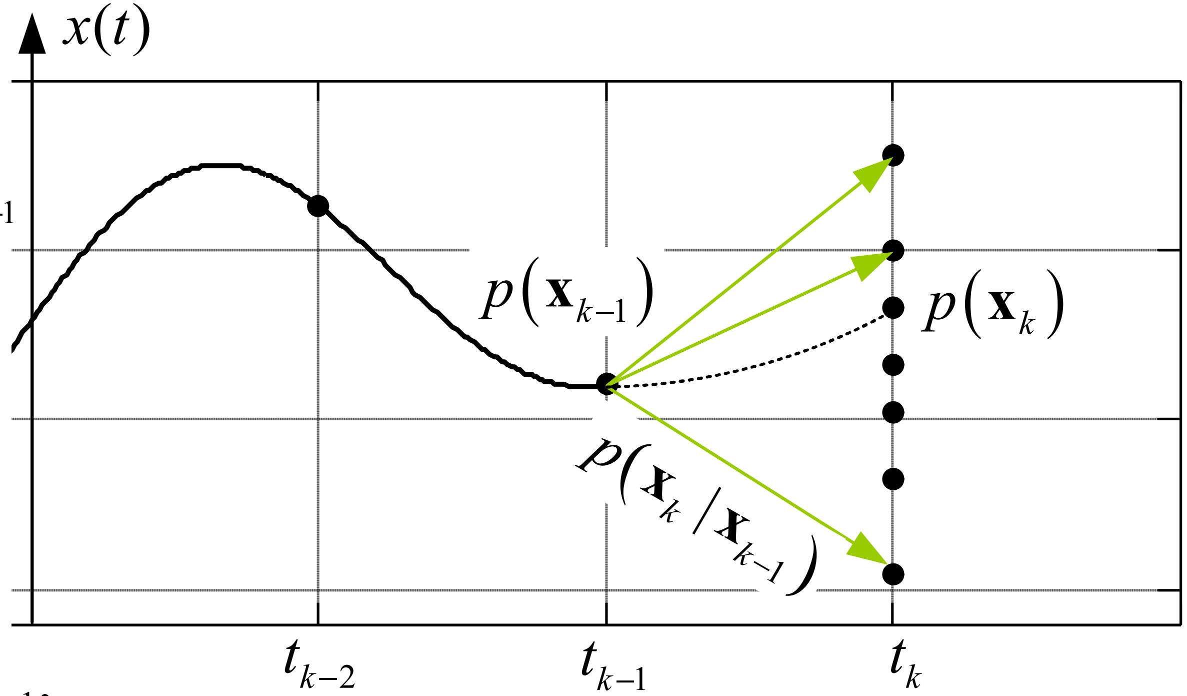
$$p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{\left(y_k - S\left(\mathbf{x}_k, t_k\right)\right)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

Плотность вероятности перехода марковского процесса

$p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1})$ - плотность вероятности перехода

Важное свойство МП:

$$p(\mathbf{x}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1})\, p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})\, d\mathbf{x}_{k-1}$$



Пример нахождения ПВ перехода для скалярного x:

$$x_k = f(x_{k-1}, t_{k-1}) + g(x_{k-1}, t_{k-1})\,\xi_{k-1},$$

ξ_{k-1} - дискретный БГШ с дисперсией σ_ξ^2

$$p(x_k | x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x_k - f(x_{k-1}, t_{k-1})\right)^2}{2\sigma^2} \right), \quad \sigma^2 = \sigma_\xi^2 g^2(x_{k-1}, t_{k-1})$$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Находим через ПВ перехода (условность не играет роли):

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1}$$

Отсюда

$$\boxed{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k}\right) = cp\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad p\left(\mathbf{x}_0 \middle| \mathbf{Y}_0^{0}\right) = p_{ap}\left(\mathbf{x}_0\right)}$$

- уравнение Стратоновича для дискретных МП

Нормировочная константа

Одношаговая функция правдоподобия

АПВ на предыдущем шаге

ПВ перехода

Уравнение Стратоновича для АПВ непрерывных МП

Описание непрерывного МП:

$$\lambda(t)=\mathbf{cx}(t),\quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)+\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\xi(t)$$

$\xi(t)-m$-мерный вектор БГШ с корреляционной

матрицей $\mathbf{R}_\xi(\tau)=(\mathbf{S}_\xi/2)\delta(\tau)$

$$\boxed{\frac{dp\left(\mathbf{x},t\middle|\mathbf{Y}_0^t\right)}{dt}=L\left(p\left(\mathbf{x},t\middle|\mathbf{Y}_0^t\right)\right)+\left[F(\mathbf{x},t)-\int_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x},t)p\left(\mathbf{x},t\middle|\mathbf{Y}_0^t\right)d\mathbf{x}\right]p\left(\mathbf{x},t\middle|\mathbf{Y}_0^t\right)}$$

$$F(\mathbf{x},t)=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(\mathbf{cx},t)2\mathbf{N}_n^{-1}\left(\mathbf{y}(t)-0{,}5\mathbf{S}(\mathbf{cx},t)\right);\qquad \mathbf{y}(t)=\mathbf{S}(\mathbf{cx},t)+\mathbf{n}(t);$$

$\mathbf{N}_n$ - корреляционная матрица шумов наблюдений: $M\left[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^{\mathrm{T}}(t+\tau)\right]=(\mathbf{N}_n/2)\delta(\tau)$

$L(*)$ - дифференциальный оператор Фоккера-Планка-Колмогорова (стр. 47)

АПВ дискретных процессов с учетом неинформ. параметров

Наблюдаемый сигнал:

$$y_k = S_k\left(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) + n_k, \quad M\left[n_k n_m\right] = \sigma_n^2 \delta_{km}, \quad \boldsymbol{\mu} = const \subset p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right)$$

Основная идея: $$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu} \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) d\boldsymbol{\mu}$$

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = c_1 p_{ap}\left(\mathbf{x}_k\right) \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{Y}_0^k \middle| \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\mu}, \quad p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = c_2 p_{ap}\left(\mathbf{x}_k\right) \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{Y}_0^{k-1} \middle| \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\mu}$$

сумасшедшая тавтология: $$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = \left(\frac{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right)}{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$$

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = c\tilde{p}\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad \text{где}$$

$$\tilde{p}\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) = \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{Y}_0^k \middle| \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\mu} \Big/ \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{Y}_0^{k-1} \middle| \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\mu}, \quad p\left(\mathbf{x}_0 \middle| \mathbf{Y}_0^0\right) = p_{ap}\left(\mathbf{x}_0\right)$$